Dynamische Systeme in der Biologie – Sommersemester 2017

4. Übungsblatt (17.5.2017)

(1) Phasenraum-Analyse

Untersuchen Sie das qualitative Lösungsverhalten der beiden gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t) \qquad \text{(Ia)}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\,\alpha\, y(t) - \beta\, x(t) \qquad \text{(Ib)}$$

wobei die Parameter α und β reelle (aber nicht notwendigerweise positive) Zahlen seien.

(1.1) Betrachten Sie zuerst den Fall $\alpha = \beta = 1$. Bestimmen Sie die x- und y-Nullisoklinen. Hat das System eine stationäre Lösung? Wie verhalten sich die Lösungskurven in der Nähe der Null-Isoklinen? Skizzieren Sie schließlich noch das Vektorfeld qualitativ in der gesamten Phasenraum-Ebene.

(1.2) Wiederholen Sie diese Schritte für die Fälle $\alpha = 1,\ \beta = -1$ und $\alpha = -1,\ \beta = 1$ und diskutieren Sie die Unterschiede zwischen den drei Szenarien.

(1.3.) Was ergibt sich im Fall $\alpha = \beta = 0$?

(2) Lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung.

Im Wintersemester haben wir uns kurz mit Differentialgleichungen höherer Ordnung beschäftigt (siehe Skript, Kapitel 14.4.) und erkannt, dass man auch diese im linearen Fall mit Hilfe des Exponentialansatzes

$$x(t) = C\, e^{\lambda\, t}$$

mit komplexwertigem λ lösen kann, wobei sich λ als Lösung eines Polynoms ergibt, dessen Ordnung der Ordnung der Differentialgleichung entspricht.

(2.1) Gehen Sie Kapitel 14.4 im Skript nochmals durch und lösen Sie nach dem dortigen Muster die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha \frac{dx(t)}{dt} + \beta\, x(t) = 0 \quad . \qquad \text{(II)}$$

Diskutieren Sie dabei insbesondere die Spezialfälle der 1.Aufgabe.

(2.2) In welchem Zusammenhang stehen die beiden Differentialgleichungen (I) mit der Differentialgleichung (II)?