Dynamische Systeme in der Biologie – Sommersemester 2017

8. Übungsblatt (12.7.2017)

(1) Partielle Ableitungen von Summen-Ausdrücken

Im Zusammenhang mit dem Modell von J.J. Hopfield (1984) sind wir auf partielle Ableitungen von Summenausdrücken gestoßen. Um dies nochmals zu üben, berechnen Sie die folgenden Ableitungen:

(a) $\frac{\partial}{\partial x}(x+y+z)$ (b) $\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+z^2)$ (c) $\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1+x_2+x_3)$ (d) $\frac{\partial}{\partial x_k}(x_1+x_2+x_3)$

(e) $\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{N} x_i$ (f) $\frac{\partial}{\partial x_2}(x_1+x_2+x_3)\cdot(x_1+x_2+x_3)$ (g) $\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{j=1}^{N} x_j$

Überlegen Sie bei (d), wie sich das Ergebnis ändert, wenn $k \notin \{1,2,3\}$, oder in (e): $k > N$. Teilaufgabe (f) lösen Sie auf zwei Arten: (i) indem Sie das Produkt der beiden Klammern ausmultiplizieren und anschließend ableiten, und (ii) indem Sie die Produktregel für Ableitungen anwenden. In gleicher Weise können Sie auch Aufgabe (g) angehen.

(2) Lyapunov-Funktion des Hopfield Modells

Die dynamischen Gleichungen des Hopfield-Modells (1984) lauten:

$$C_i \frac{du_i(t)}{dt} = -\frac{1}{R_i}u_i(t) + \sum_{j=1}^{N} T_{ij}V_j(t) + I_i \qquad (1)$$

Die physikalische Interpretation dieser Größen wird in Aufgabe (3) beschrieben, im Moment ist nur wichtig, dass alle C_i und R_i positiv sind, die T_{ij} die Symmetrie $T_{ij} = T_{ji}$ erfüllen und $T_{ii} = 0$ gilt. Die Variable $V_j(t)$ steht für die Ausgangsaktivität von Neuron j und ist über $V_j(t) = g_j(u_j(t))$ mit dem Membranpotential $u_j(t)$ verbunden. Die Funktionen g_j seien streng monoton wachsend.

Zeigen Sie, dass die "Energie" oder (mathematisch gesprochen) "Lyapunov"-Funktion

$$E(V_1, V_2, \ldots V_N) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} T_{ij}\, V_i\, V_j + \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i}\int_0^{V_i} g_i^{-1}(V)\, dV - \sum_{i=1}^{N} I_i V_i$$

für $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ und $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$ nach unten beschränkt ist und entlang der Lösungen von (1) monoton abnimmt. Was bedeutet dies für die Langzeit-Entwicklung des Systems?

(3) Einzelnes Neuron mit Feedback

In der Vorlesung vom 12.7.2017 haben wir ein einzelnes, mit sich selbst rückgekoppeltes Neuron durch die Differentialgleichung

$$C \frac{du(t)}{dt} = -\frac{1}{R}u(t) + T\, V(t) + I$$

beschrieben, wobei C die Kapazität, R den Eingangswiderstand, T die Stärke der Rückkopplung, und I den externen Stimulus (als in der Zeit konstant angenommen) beschreiben. Weiterhin sei die Funktion g nun auch differenzierbar; der größte Wert ihrer Ableitung sei A.

Überlegen Sie, unter welchen Bedingungen (vor allem an A, I, R und T) diese Differentialgleichung mehr als eine stationäre Lösung haben kann. Welchen Einfluss hat der Wert von C? Warum?