Dynamische Systeme in der Biologie – Sommersemester 2017

2. Übungsblatt (3.5.2017)

(1) Passives Neuron - Teil II.

Die Dynamik des Membranpotentials V werde wie im 1.Übungsblatt durch die Differentialgleichung

$$\tau \frac{dV(t)}{dt} = -V(t) + R \cdot I(t)$$

beschrieben. Nebenbemerkung: Dieses Neuronen-Modell wird auch als "leaky integrator neuron" bezeichnet, da die Lösung $V(t)$ der DGL zwar mit dem zeitlichen Integral des externen Stroms $I(t)$ zu tun hat, dies wegen des Terms $-V(t)$ auf der rechten Seite der DGL aber nicht 100% stimmt, so dass z.B. für zeitlich konstanten Strom $I(t) = I$ das Membranpotential nicht über alle Grenzen wächst (wie es für $\tau\, dV/dt = R \cdot I$ der Fall wäre), sondern asymptotisch für $t \to \infty$ zum endlichen Wert $V_{equilibrium} = R \cdot I$ strebt.

Betrachten Sie nun den Fall, dass der Inputstrom $I(t)$ für $t < 0$ verschwindet, für $0 < t < T$ den konstanten Wert I_0 hat, und für $t > T$ wieder verschwindet. Weiterhin gelte $V(t = 0) = 0$.

(1.1) Wie verhält sich $V(t)$ im Intervall $0 < t < T$, wie groß ist insbesondere $V_{max} = V(t = T)$?
(1.2) Wie verhält sich V_{max} für kleine T? (Taylorentwicklung bis zur linearen Ordnung) Interpretieren Sie Ihr Ergebnis und berücksichtigen Sie, dass für die gesamte transportierte Ladung gilt: $Q = I \cdot T$.
(1.3) Wie verhält sich $V(t)$ im Intervall $t > T$? Hinweis: Die Lösung $V(t)$ muss stetig sein. (Warum?)
(1.4) Überlegen Sie, ob/wie Sie diese Ergebnisse nutzen können, um experimentell die Zeitkonstante τ und den Eingangswiderstand R eines "leaky integrator" Neurons zu messen.

(2) "Leaky integrate-and-fire neuron"

Betrachten Sie ein Modellneuron, dessen Dynamik wie in (1) lautet, wobei wir für den Inputstrom $I(t) = I$ annehmen wollen (zeitlich konstanter Input).

Neu kommt nun dazu: Wenn das Membranpotential $V(t)$ einen festen Schwellwert θ erreicht, dann wird $V(t)$ instantan auf den Wert $V = 0$ zurückgesetzt. Dieses Ereignis wird als die Erzeugung eines Aktionspotentials ("firing a spike") interpretiert. Man spricht dann auch von einem "Leaky integrate-and-fire neuron".

Die mathematische Beschreibung dieses Modells geht also über die einer Differentialgleichung 1.Ordnung hinaus – insbesondere kann das Membranpotential nun langsam anwachsen (durch die DGL formuliert) und dann schlagartig wieder abnehmen (durch das augenblickliche Zurücksetzen des Membranpotentials beschrieben), so dass jetzt auch Aktionspotential-Folgen möglich sind.

Berechnen Sie das Inter-Spike-Interval (ISI), d.h., den zeitlichen Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Spikes als Funktion von R, C, I und θ. Welche Bedingung an die Parameter muss erfüllt sein, damit das Modellneuron überhaupt Aktionspotentiale erzeugt?

(3) Wenn Sie abends einmal Zeit haben, dann schmökern Sie doch ein wenig im Artikel "A brief historical perspective: Hodgkin and Huxley" von C.J. Schwiening (siehe WebSite der Vorlesung).