Klausur zur Vorlesung „Dynamische Systeme in der Biologie“ (13.7.2016)

(1) Betrachten Sie die beiden gekoppelten Differentialgleichungen 1.Ordnung **[9]**

$\tau_x\, dx/dt = y$ $\quad$ (I_x)
$\tau_y\, dy/dt = -x$ $\quad$ (I_y)

(1a) Schreiben Sie die Dynamik als *eine* skalare Differentialgleichung 2.Ordnung. [1]
(1b) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung. Wie viele freie Parameter gibt es? [4]
(1c) Wie schätzen Sie die Stabilität der Lösungen ein? (Heuristik, keine Herleitung!) [1]
(1d) Wie lautet die Lösung für die Anfangsbedingung $x(t=0) = 0$, $y(t=0) = 1$? [3]

(2) Das obige System werde nun durch zwei zusätzliche Terme erweitert, so dass sich **[16]**

$\tau_x\, dx/dt = y - x$ $\quad$ (II_x)
$\tau_y\, dy/dt = -x - y$ $\quad$ (II_y)

als neues System ergibt.

(2a) Wie lauten die Null-Isoklinen? Tragen Sie sie in eine Phasenraumskizze ein. Gibt es stationäre Lösungen? In welchen Richtungen schneiden Lösungen die Null-Isoklinen? [2]
(2b) Schreiben Sie das System als vektorwertige Differentialgleichung für $\mathbf{z}=(x,y)^T$, d.h. $d\mathbf{z}/dt = A\,\mathbf{z}$. Wie lautet die Koeffizientenmatrix A? [1]
(2c) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A. [4]
(2d) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung $\mathbf{z}(t)$. [4]
(2e) Wie entwickelt sich das System für lange Zeiten? [2]
(2f) Skizzieren Sie auf der Grundlage Ihrer Ergebnisse die Trajektorien einiger Lösungen in der Phasenraum-Ebene. Von welchem Typus ist die stationäre Lösung? [3]

(3) Betrachten Sie die Zustandsfunktion eines Systems mit zwei Variablen x,y: **[7]**

$E(x,y) = x^2 + y^2$

(3a) Die Variablen x und y seien zeitabhängig. Wie ändert sich E entlang einer Trajektorie? Berechnen Sie dazu die totale Zeitableitung von E. [2]
(3b) Die Dynamik von x und y sei jetzt durch die Differentialgleichungen (I) gegeben. Wie verändert sich E im Lauf der Zeit? Was bedeutet dies für die Lösungen? [1]
(3c) Die Dynamik von x und y sei nun durch die Differentialgleichungen (II) gegeben. Wie verändert sich E im Lauf der Zeit? Was bedeutet dies für die Lösungen? [1]
(3d) Die Dynamik von x und y sei schließlich durch

$\tau_x\, dx/dt = y \cdot f(x,y)$ $\quad$ (III_x) $\quad$ bzw. $\quad$ $\tau_x\, dx/dt = y + m(x,y)$ $\quad$ (IV_x)
$\tau_y\, dy/dt = -x \cdot g(x,y)$ $\quad$ (III_y) $\quad\quad\quad$ $\tau_y\, dy/dt = -x + n(x,y)$ $\quad$ (IV_y)

mit beliebigen Funktionen f, g, m und n gegeben. Unter welcher Bedingung an f(x,y) und g(x,y) bzw. m(x,y) und n(x,y) ist E eine Erhaltungsgröße? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis. [3]

(4) Fragen zur Neurobiologie und mathematischen Modellierung: **[18]**
(4a) Welche physikalischen Größen bestimmen die Membranzeitkonstante eines Neurons? [1]
(4b) Wie kann man die Membranzeitkonstante experimentell ermitteln? [1]
(4c) Wie verhält sich ein „leaky-integrator neuron“ mit zeitabhängigem Inputstrom I(t) und was ist ein „integrate-and-fire“ Modell? [2]
(4d) Beschreiben Sie das Hodgkin-Huxley Modell. [3]
(4e) Welches ist die kürzeste Zeitkonstante im Hodgkin-Huxley Modell? Konsequenzen? [1]
(4f) Welche der Ihnen bekannten Modelle haben eine reine Spannungsschwelle? [1]
(4g) Skizzieren Sie die Prozesse der Signalübertragung an einer chemischen Synapse. [2]
(4h) Was versteht man unter „Long-Term-Potentiation (LTP)“? [1]
(4i) Welche synaptischen Größen änderten sich/sich nicht bei Markram/Tsodyks unter LTP? [1]
(4j) Welche Konsequenzen haben diese Ergebnisse für die neuronale Kodierung? [1]
(4j) Was ist der Unterschied zwischen „feed-forward“ und „recurrent“ neural networks? [1]
(4k) Was versteht man unter „assoziativer Mustererkennung“? [1]
(4l) Wie viele Muster kann man in einem Hopfield Modell mit 10^3 Units ungefähr speichern? [1]
(4m) Was bedeutet „memory catastrophy“ im Hopfield Modell? [1]