

Dynamische Systeme in der Biologie: Beispiel Neurobiologie

Dr. Caroline Geisler
geisler@lmu.de

June 6, 2018

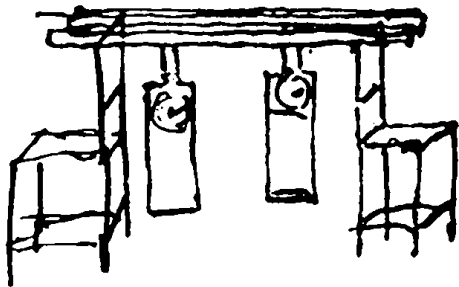
Synchronisation

(griechisch: *συν* [syn] “zusammen”, *χρόνος* [chronos] “Zeit”)

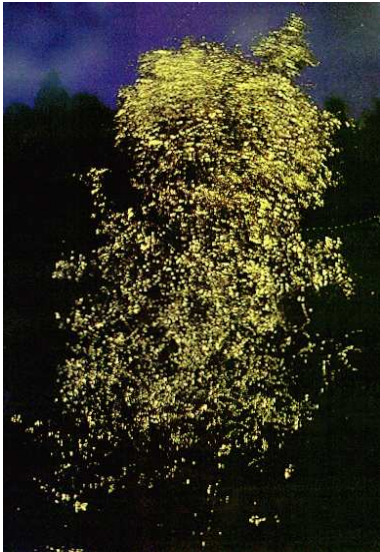
Synchronisation durch schwache Kopplung

Christiaan Huygens (1629-1695) beobachtete 1676 die Synchronisation von Pendeluhren.

- ▶ Zwei Pendeluhren, die an dem selben Holzbalken aufgehängt waren, synchronisierten sich anti-phasisch.



Synchronisation in der Natur



Malaysische männliche
Glühwürmchen leuchten im
Einklang

Andere Beispiele:

- ▶ Das zirpen der Grillen
- ▶ Jupitermonde: orbitale Resonanz
- ▶ Der Herzschlag

Was ist Synchronisation?

Synchronisation ist...

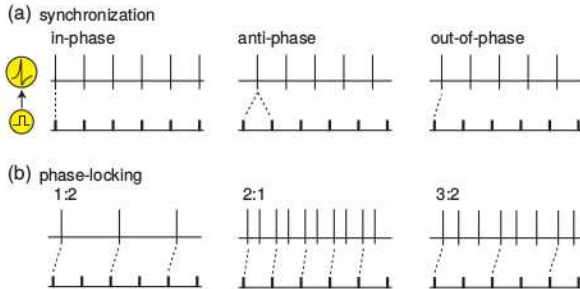
- ▶ Oszillierende Objekte gleichen sich durch ihre schwache Interaktion an.

Synchronisation ist NICHT...

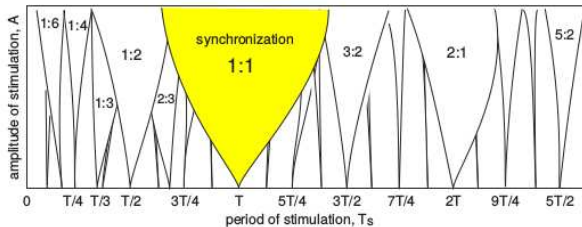
- ▶ eine Bewegung ohne Oszillationen im selbstständigen Objekt.
- ▶ unbedingt die synchrone Variation von zwei Variablen.
- ▶ das Antreiben durch starke Kopplung (das ist trivial).

(Literatur: <https://www.izhikevich.org/publications/dsn.pdf>)

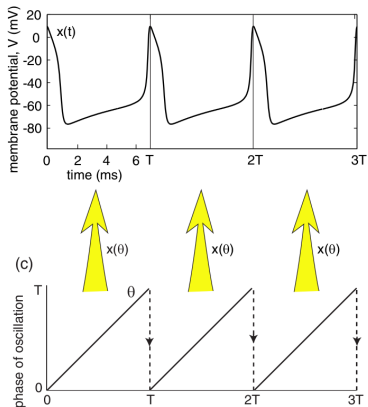
Verschiedene Arten der Synchronisation



Arnoldszungen:

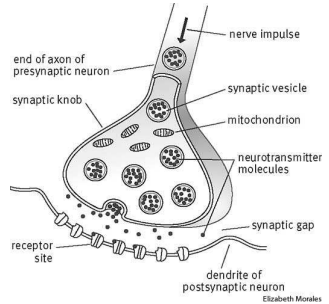
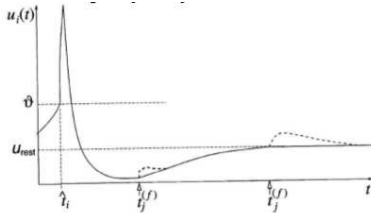


Phase der (neuronalen) Oszillation



- ▶ Das Oszillationsintervall wird in gleichmäßige Zeitintervalle unterteilt.
- ▶ Die Zeitintervalle werden Phasenintervallen von 0 bis 2π zugeordnet.

Synaptischer Input-Puls



Postsynaptische Potentiale, hervorgerufen durch **synaptischen Strom**

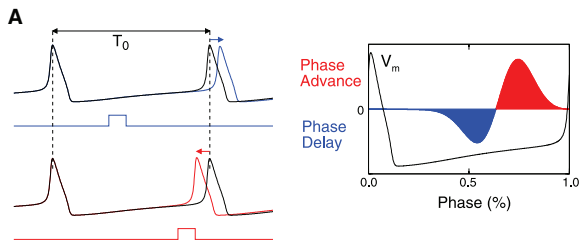
$$I_{syn} = -g_{syn} s(t) (V - E_{syn})$$

$E_{syn} = 0$ mV für exzitatorische

$E_{syn} = -75$ mV für inhibitorische Synapse

Phase-Response Eigenschaften von Neuronen

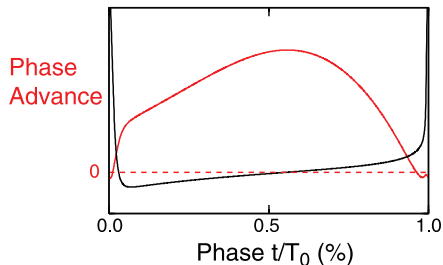
Wie wird der Zeitpunkt eines Spikes durch einen kleinen synaptischen Impuls beeinflusst?



(Wang 2010)

- ▶ Sinus: Effekt ist unabhängig von der Phase.
- ▶ Neuron sind nichtlineare Oszillatoren: Effekt hängt von Phase ab.
- ▶ Beispiel HH Neuron: bi-phasche Phase-Response-Kurve ("Type II").

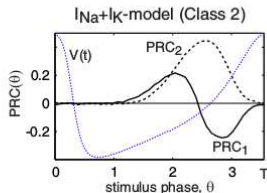
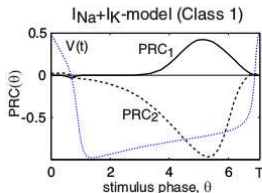
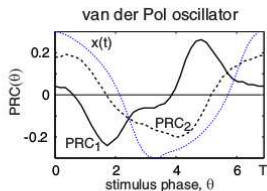
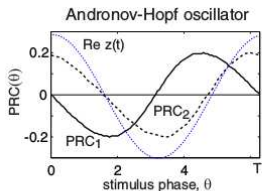
Neuron Klasse, Phasen-Response Typ



(Wang 2010)

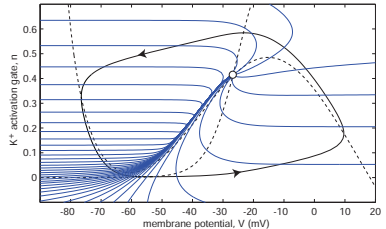
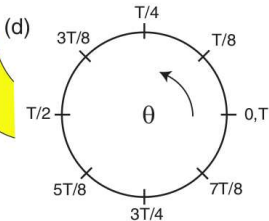
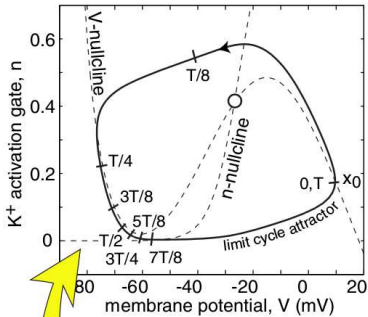
- ▶ Dynamik des Neurons bestimmt Eigenschaften der Synchronisation.
- ▶ modifiziertes HH-Neuron (reduzierte g_K und schnellere Na and K Kinetik \rightarrow Klasse 1): Nur Vorrücken der Phase ("Type I").

Beispiele: Phase-Response-Kurven



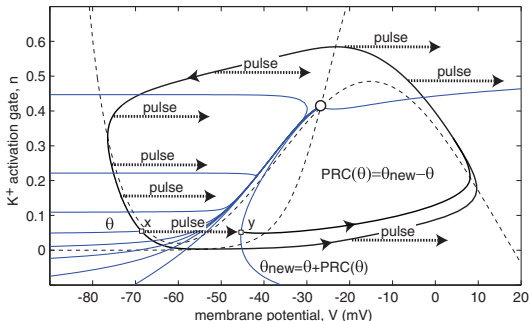
- ▶ PRC_1 : Puls entlang der ersten Variable
- ▶ PRC_2 : Puls entlang der zweiten Variable

Iso-Chrone im Phase-Raum



- ▶ **Iso-Chrone:** Linien mit gleicher Zeit/Phase im Phaseraum.

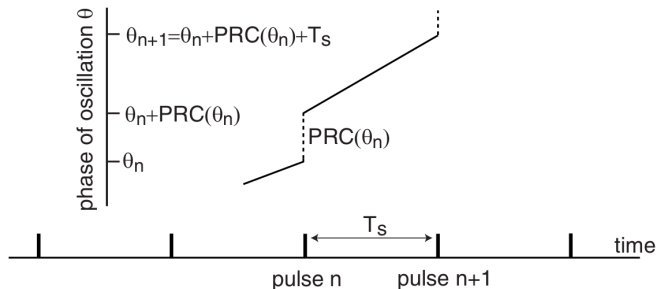
Input-Puls im Phase-Raum



- ▶ **Phase-Response-Kurve:** Phasen-Vorschub/-Verzögerung durch einen Input-Puls.

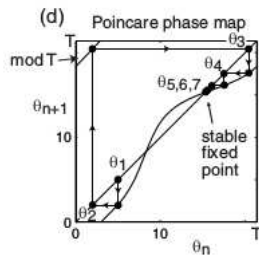
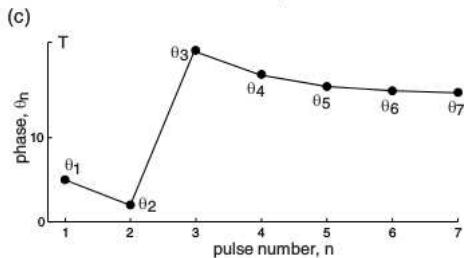
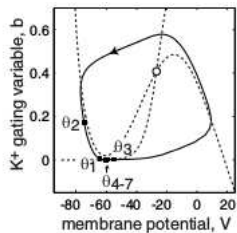
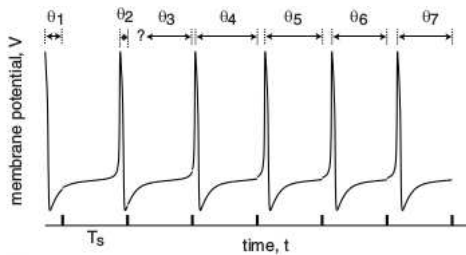
$$\theta_{new} = \theta + PRC(\theta)$$

Poincaré-Abbildung für mehrere Pulse



Poincaré map: Vorhersage der Phase des nächsten Pulses:

$$\theta_{n+1} = (\theta_n + \text{PRC}(\theta_n) + T_s) \bmod T$$



Fixpunkte der Poincaré-Abbildung

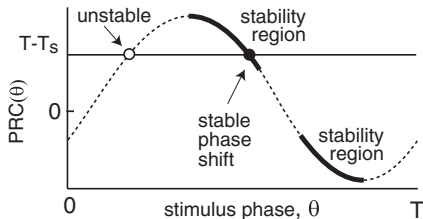
- ▶ Stabiler Fixpunkt: Der Oszillator und der Input-Puls synchronisieren.
- ▶ Poincaré-Abbildung $\theta_{n+1} = f(\theta_n)$
Am Fixpunkt: $\theta_{n+1} = \theta_n$
⇒ finde Schnittpunkt von $f(\theta)$ mit Diagonale $\theta_{n+1} = \theta_n$.
- ▶ Stabilität:

| | |
|--------------------|-------------|
| $ f'(\theta) < 1$ | stabil |
| $ f'(\theta) > 1$ | instabil |
| $ f'(\theta) = 1$ | Bifurkation |

Fixpunkte der Poincaré-Abbildung

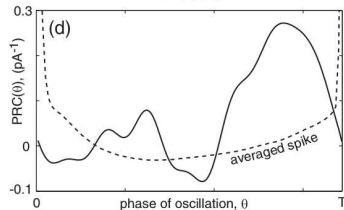
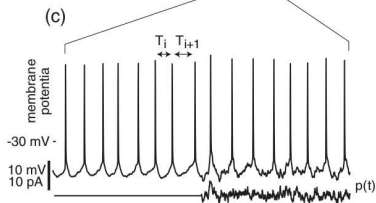
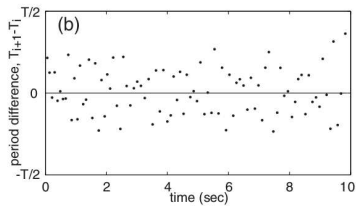
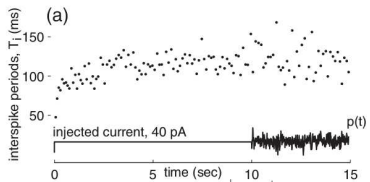
- ▶ Puls gleicht Frequenz-Differenz aus:

$$\text{PRC}(\theta) = T - T_s$$



- ▶ Stabiler Fixpunkt für: $-2 < \text{PRC}'(\theta) < 0$
- ▶ Klasse 1 Neuron: stabil nur wenn $T > T_s$

Messen der PRC



Phasen-Gleichung für einen Oszillator

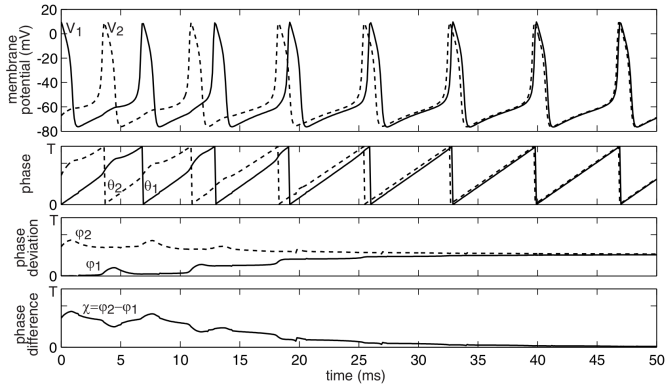
Wie kommt man von

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + \varepsilon p(t) \quad \text{auf} \quad \frac{d\theta}{dt} = 1 + \varepsilon \text{PRC}(\theta)p(t) \quad ?$$

Yoshiki Kuramoto: Gradient von $\theta(x)$ auf der Iso-Chrone.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta(x)}{dt} &= \frac{d\theta}{dx} \frac{dx}{dt} = \text{grad}(\theta) \cdot f(x) = 1 \quad \text{für } p = 0 \\ \frac{d\theta(x)}{dt} &= \text{grad}(\theta) \cdot [f(x) + \varepsilon p(t)] \quad \text{für } p \neq 0 \\ &= 1 + \varepsilon \text{grad}(\theta)p(t) \\ &= 1 + \varepsilon Q(\theta)p(t) \end{aligned}$$

Zwei gekoppelte Oszillatoren



System schwach gekoppelter Oszillatoren

System von gekoppelten Oszillatoren:

$$\frac{dx_i}{dt} = f(x_i) + I_{syn} = f(x_i) + \varepsilon \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_i, x_j)$$

Die entsprechenden Phasen:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = 1 + \varepsilon Q_i(\theta_i) \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_i(\theta_i), x_j(\theta_j))$$

Langsame Phasen-Veränderung:

$$\theta_i(t) = t + \phi_i$$

$$\rightarrow \frac{d\phi_i}{dt} = \varepsilon Q_i(t + \phi_i) \sum_{j=1}^n g_{ij}(x_i(t + \phi_i), x_j(t + \phi_j))$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_i}{dt} &= Q_i(t + \phi_i) \sum_{j=1}^n g(x_i(t + \phi_i), x_j(t + \phi_j)) \\ &= \omega_i + \sum_{i \neq j} H_{ij}(\phi_j - \phi_i)\end{aligned}$$

mit

$$H_{ij}(\phi_j - \phi_i) = \frac{1}{T} \int_0^T Q_i(t) g(x_i(t), x_j(t + \phi_j - \phi_i)) dt$$

Zwei gekoppelte Oszillatoren:

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 + H_1(\phi_2 - \phi_1) \quad (I)$$

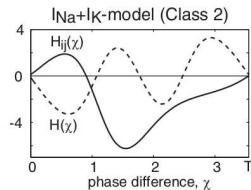
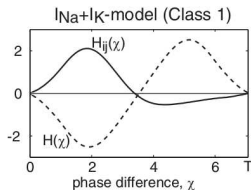
$$\frac{d\phi_2}{dt} = \omega_2 + H_2(\phi_1 - \phi_2) \quad (II)$$

Zwei schwach gekoppelte Oszillatoren

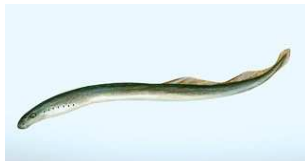
Subtrahiere (I) von (II), mit $\chi = \phi_2 - \phi_1$ und $\omega = \omega_2 - \omega_1$

$$\frac{d\chi}{dt} = \omega + H_2(-\chi) - H_1(\chi) \equiv \omega + H(\chi)$$

- ▶ Fixpunkt: $H(\chi) = -\omega$
- ▶ Stabil für: $dH(\chi)/d\chi|_{fix} < 0$



Eine Kette aus gekoppelten Oszillatoren



Beispiel: die
Schwimm-Bewegungen der
Neunaugen

$$\frac{d\phi_1}{dt} = \omega_1 + H^+(\phi_2 - \phi_1)$$

\vdots

$$\frac{d\phi_k}{dt} = \omega_k + H^-(\phi_{k-1} - \phi_k) + H^+(\phi_{k+1} - \phi_k)$$

\vdots

$$\frac{d\phi_n}{dt} = \omega_n + H^-(\phi_{n-1} - \phi_n)$$

- ▶ Welche Lösung ergibt eine “Traveling Wave”?

Referenzen

- ▶ **(Izhikevich 2007)** Izhikevich E.M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. The MIT press, 2007
- ▶ **(Izhikevich 2007b)** Izhikevich E.M. *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. Chapter 10 <https://www.izhikevich.org/publications/dsn.pdf>
- ▶ **(Wang 2010)** Wang X.-J. *Neurophysiological and computational principles of cortical rhythms in cognition*. *Physiol. Rev.* 2010, 90: 1195-1268