Dynamische Systeme in der Biologie

3. Übungsblatt (zu bearbeiten bis zum 3.5.2018)

(1) Kinetik von "gating particles" in der Pore eines Ionenkanals. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_x(\mathrm{V}) \cdot (1 - x) \; - \; \beta_x(\mathrm{V}) \cdot x \qquad\qquad (I)$$

auch als

$$\tau_x(V)\,\frac{dx}{dt} = -x + x_\infty(V) \qquad\qquad (II)$$

geschrieben werden kann.

(a) Wie hängen $\tau_x(V)$ und $x_\infty(V)$ von $\alpha_x(V)$ und $\beta_x(\mathrm{V})$ ab?

(b) Betrachten Sie nun die Gleichung (II) für festes V. Was für ein Typ an Differentialgleichung liegt vor? Welche Verfahren zur Lösung der Differentialgleichung kennen Sie?

(c) Lösen Sie nun die Differentialgleichung. Setzen Sie zur Vereinfachung $\tau \equiv \tau_x(V)$ und $C \equiv x_\infty(V)$. Der Wert von x zur Zeit $t = 0$ sei x_0.

(d) Skizzieren Sie qualitativ in einer Abbildung die Lösungen für
(i) $\tau = 10ms$, $C = -70mV$ und $x_0 = 0mV$,
(ii) $\tau = 10ms$, $C = -70mV$ und $x_0 = 20mV$,
(iii) $\tau = 10ms$, $C = -50mV$ und $x_0 = 20mV$,
(iv) $\tau = 10ms$, $C = -50mV$ und $x_0 = 0mV$,
(v) $\tau = 10ms$, $C = -50mV$ und $x_0 = -50mV$,
(vi) $\tau = 20ms$, $C = -70mV$ und $x_0 = 0mV$.

(2) Aktionspotential.
Im Hodgkin-Huxley Modell erfüllt das Membranpotential die Differentialgleichung

$$C\,\frac{dV(t)}{dt} = I_{gesamt}(t) \; = \; -I_{Na}(t) - I_K(t) - I_L(t) + I(t)$$

wobei $I_{gesamt}(t)$ den Gesamtstrom, $I_{Na}(t)$ den Natriumstrom, $I_K(t)$ den Kaliumstrom, $I_L(t)$ den Leckstrom und $I(t)$ den von außen angelegten Strom bezeichnet.

Zu Beginn des Experiments (Zeit $t = 0$) sei die Zelle am Ruhepotential, werde dann durch einen Strompuls zum Feuern gebracht und kehre schließlich zur Zeit $t = T$ wieder zum Ruhepotential zurück.

Wie groß ist dabei die zwischen $t = 0$ und $t = T$ insgesamt geflossene Ladung Q?

Hinweis: Überlegen Sie im ersten Schritt, was der Ausdruck "die zwischen $t = 0$ und $t = T$ insgesamt geflossene Ladung Q" physikalisch bedeutet und drücken Sie dies mathematisch aus. Wenden Sie im zweiten Schritt den linken Teil der obigen Gleichung an und lösen Sie schließlich das sich ergebende Integral. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

(3) Bearbeiten Sie nochmals Aufgabe (4) des 2.Aufgabenblattes.