Dynamische Systeme in der Biologie

4. Übungsblatt (zu bearbeiten bis **Mittwoch**, 9.5.2018)

(1) Phasenraum-Analyse.

Skizzieren Sie die (zweidimensionalen) Flussfelder für

(a) $dx/dt = y, \quad dy/dt = -x$

(b) $dx/dt = y, \quad dy/dt = x$

(c) $dx/dt = -y, \quad dy/dt = -x$

Vergleichen Sie anschließend diese drei Felder. Welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten gibt es?

(2) FitzHugh-Nagumo-Modell.

(a) Skizzieren Sie die Nullklinen des FitzHugh-Nagumo-Modells

$$\frac{dV}{dt} = V - V^3 - \mathrm{W} + \mathrm{I}$$

$$\tau \frac{dW}{dt} = V + a - \mathrm{bW}$$

mit a=0.7, b=0.8 und τ=12.5, für I=-1, I=0 und I=+1.

(b) Wie verändern sich die Nullklinen, wenn sie die Zeitkonstante τ vergrößern/verkleinern? Warum?

(c) Tragen Sie die Flusslinien von V bzw. W im Bereich der Nullklinen ein.

(d) Welche Richtungen haben die Flusslinien in den Raumbereichen zwischen den Nullklinen?

(e) Was können Sie damit über die Natur der Lösungen in der Nähe der stationären Lösung sagen?

(3) Phasenraum-Analyse.

Untersuchen Sie das qualitative Lösungsverhalten der beiden gekoppelten Differentialgleichungen

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\,\alpha\, y(t) - \beta\, x(t)$$

wobei die Parameter α und β reelle (aber nicht notwendigerweise positive) Zahlen seien.

(a) Betrachten Sie zuerst den Fall $\alpha = \beta = 1$. Bestimmen Sie die x- und y-Nullklinen. Hat das System eine stationäre Lösung? Wie verhalten sich die Lösungskurven in der Nähe der Nullklinen? Skizzieren Sie schließlich noch das Vektorfeld qualitativ in der gesamten Phasenraum-Ebene.

(b) Wiederholen Sie diese Schritte für die Fälle $\alpha = 1,\ \beta = -1$ und $\alpha = -1,\ \beta = 1$ und diskutieren Sie die Unterschiede zwischen den drei Szenarien.

(c) Was ergibt sich im Fall $\alpha = \beta = 0$?