Dynamische Systeme in der Biologie

12. Übungsblatt (zu bearbeiten bis **Mittwoch**, 4.7.2018)

(1) Lyapunov-Funktion des Little Modells

Die dynamischen Gleichungen des Little-Modells (1974) lauten:

$$S_i(t+1) = sgn\left[\sum_{j=1}^{N} T_{ij} S_j\,(t) \; + \; I_i\right] \qquad (1)$$

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$H(S_1, S_2, \ldots S_N) = -\sum_{i=1}^{N} \left|\sum_{j=1}^{N} T_{ij} S_j \; + \; I_i\right| \qquad (2)$$

eine Lyapunov-Funktion der Dynamik ist, falls $I_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq N$ gilt. Betrachten Sie nun den allgemeinen Fall, dass die externen Eingänge I_i beliebige Werte annehmen. Untersuchen Sie, ob (2) dann immer noch eine Lyapunov-Funktion? Falls nein: Warum? Können Sie einen zusätzlichen Term finden, um die Situation zu retten? Betrachten Sie dazu die Lyapunov-Funktion des Hopfield-Modells!

(2) Hebb'sche Lernregel

In der Vorlesung wurde die "Lern"-Regel

$$T_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{p} \xi_i^{\mu}\, \xi_j^{\mu} \qquad (3)$$

zur Beschreibung der Stärke einer synaptischen Kopplung zwischen Neuron j und i vorgestellt. Hierbei bezeichnet ξ_i^{μ} die Aktivität von Neuron i im Muster μ, mit $1 \leq \mu \leq p$. Vergleichen Sie diese Formel mit zwei alternativen Regeln,

$$T_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{p} \xi_i^{\mu+1}\, \xi_j^{\mu} \qquad (4) \qquad \text{und} \qquad T_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{p} \xi_i^{\mu} \sum_{k=1}^{N} \xi_k^{\mu} \quad . \qquad (5)$$

Wie unterscheiden sich diese 3 Regeln? Was bedeutet dies biologisch gesehen? Wann wird das Prinzip "fire together, wire together" umgesetzt, wann nicht? Warum?

(3) Energie-Zustände im Hopfield Modell

In der Vorlesung wurden die Überlapps $m_\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i^{\mu}\, V_i$ eingeführt und gezeigt, dass der erste Beitrag zur Lyapunov-Funktion des Hopfield Modells als $E_1 = -\frac{N}{2} \sum_{\mu=1}^{p} \left(m_\mu\right)^2$ geschrieben werden kann, falls die synaptischen Kopplungen T_{ij} gemäß der Hebb'schen Lernregel (3) definiert sind.

Betrachten Sie ein Netz mit 8 Neuronen, in dem 3 Muster, $\xi^1 = (+1, +1, +1, +1, -1, -1, -1, -1)$, $\xi^2 = (+1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, -1)$ und $\xi^3 = (+1, -1, +1, -1, +1, -1, +1, -1)$ gespeichert sind. Wie groß ist E_1 wenn sich das System im ersten Muster befindet (d.h. $V_i = \xi_i^1$)? Und wie groß ist E_1 wenn das System im "Mischzustand" $V_m = (+1, +1, +1, -1, +1, -1, -1, -1)$ verweilt? Versuchen Sie auch zu ergründen, warum dieser Zustand "Mischzustand" genannt wird! Wie hängt er mit den drei Musterzuständen zusammen? Können Sie diese Regel formalisieren? Falls Sie gerne programmieren, berechnen Sie E_1 für alle 2^8 binären Zustände des Systems. Was fällt Ihnen auf?