Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Grundlagentutorium 3

Sebastian Groß

Termin	Mittwochs 15:45 – 17:45 | Großer Hörsaal Biozentrum (B00.019)
E-Mail	gross@bio.lmu.de
Sprechzeiten	Montags 12:30 – 13:30 | Donnerstags 12:30 – 13:30
Raum	D01.021
Telefon	(089) 2180 74825

Aufgabe 1 (Wiederholung I: Iterierte Abbildungen [Probeklausur WiSe 15/16])

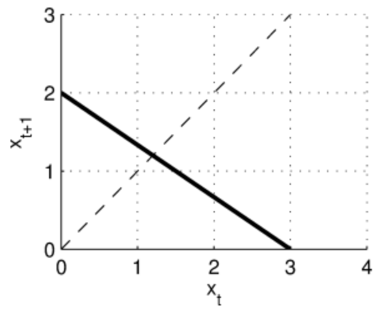
a) Die Mitglieder eines Anglerclubs angeln am Chiemsee. In einer Stunde angeln sie 10% des vorhandenen Gesamtbestands. Demgegenüber werden in zwei Stunden 20 neue Fische geboren. Modellieren Sie diesen Sachverhalt durch eine iterierte Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$; $t = 0,1,2,\ldots$

b) Berechnen Sie den Fixpunkt von $x_{n+1} = f(x_n)$ und bestimmen Sie dessen Stabilität.

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n^2}\right) \qquad ; \; n = 0,1,2,\ldots$$

Aufgabe 2 (Wiederholung II: Iterierte Abbildungen [Klausur I WiSe 15/16])

Man betrachte folgende graphische Darstellung einer linearen iterierten Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ in welcher der Graph der Iterationsfunktion f als durchgezogene Linie und die Winkelhalbierende als gestrichelte Linie dargestellt sind.



a) Markieren Sie den Fixpunkt und bestimmen Sie dessen Stabilität.

b) Skizzieren Sie die Entwicklung x_t als Funktion der Zeit t für die Anfangsbedingungen $x_0 = 0$ und $x_0 = 3$.

c) Welche der folgenden iterierten Abbildungen gehört, wenn überhaupt, zu obigem Graphen? Begründen Sie Ihre Zuordnung genau.

i) $f(x_t) = x_{t+1} = -\frac{3}{2}x_t + 2$ ii) $g(x_t) = x_{t+1} = \frac{2}{3}x_t + 2$

iii) $h(x_t) = x_{t+1} = -\frac{2}{3}x_t + 2$ iv) $q(x_t) = x_{t+1} = -\frac{3}{2}x_t - 2$

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Wiederholung III: Iterierte Abbildungen [Wiederholungsklausur WiSe 15/16])

Die Anzahl x_t an Fröschen in einem Teich nimmt pro Jahr um 60% zu. Gleichzeitig werden jährlich 20 Frösche durch Fressfeinde erbeutet.

a) Modellieren Sie diesen Sachverhalt durch eine iterierte Abbildung der folgenden Form.

$$x_{t+1} = f(x_t) \ ; \ t = 0,1,2,\ldots$$

b) Finden Sie die Lösung x_t in der Form $x_t = g(t)$ zum Anfangswertproblem

$$x_{t+1} = f(x_t) \ \text{mit}\ x_0 = 100.$$

Aufgabe 4 (Wiederholung IV: Iterierte Abbildungen)

a) Zeigen Sie:
Seien y_t und z_t zwei verschiedene Lösungen von $x_{t+1} = ax_t \ \ (a \in \mathbb{R})$.
Dann ist $w_t = y_t + z_t$ ebenfalls eine Lösung von x_{t+1}.

b) Zeigen Sie:
Sei y_t eine Lösung von $x_{t+1} = 4x_t$ und z_t eine Lösung von $x_{t+1} = 4x_t - 2$.
Dann ist $w_t = y_t + z_t$ eine Lösung von $x_{t+1} = 4x_t - 2$.

c) Gegeben sei die Lösung einer iterierten Abbildung durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = (\ 2.5\ , 2\ , 1.5\ , 1\ , 0.5\ , \ldots\ )$.
Finden Sie eine explizite Darstellung von a_n für das n-te Glied. Leiten Sie aus dieser Folge ein Anfangswertproblem

$$a_{n+1} = f(a_n) \ ; \ a(n = 0) = a_0$$

her, welches a_n als eindeutig bestimmte Lösung besitzt.

Aufgabe 5 (Definitionsbereich und Ableitungsregeln)

Bestimmen Sie für jede Funktion den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ sowie die erste Ableitung.

Für Teilaufgabe e) brauchen Sie die Definitionsmenge nicht angeben, wir legen hierfür $\mathbb{D}_f =]0\ ;\ \infty[$ fest.

a) $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$ b) $f(x) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}$ c) $f(x) = |x| \cdot x$ d) $f(x) = |x - 1|$ e) $f(x) = x^{(x^x)}$

Aufgabe 6 (Ableitung der Umkehrfunktion)

Berechnen Sie die Ableitung von

$$f(x) = \arctan(x) \text{ auf }]-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}[$$

wobei arctan die Umkehrfunktion von tan bezeichnet.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass tan auf $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ bijektiv, also umkehrbar, ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 7 (Taylor-Entwicklung)

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von

$$f(x) = -\ln(1 - \frac{x}{2})$$

um $a = 0$ bis einschließlich 4. Ordnung.

Wie lautet dann die Taylor-Entwicklung bis 3., 2., 1. und 0. Ordnung?

Aufgabe 8 (Grenzwerte, Regel von de l'Hospital)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+10}{6x-25}$

c) $\lim\limits_{x \searrow 0} x \cdot \ln x$

d) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \frac{2}{x})^{3x}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{3x} - 1)^{x^{-1}}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 + 5})$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x}$

i) $\lim\limits_{x \searrow 0} (1 + \ln x)$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x - 1)^x$

k) $\lim\limits_{x \to \infty} ((-x) \cdot (-x))$

l) $\lim\limits_{x \to \infty} ((-x) \cdot x^3)$

Hinweis 1:

$\lim\limits_{x \searrow 0}$ ist eine alternative Schreibweise für $\lim\limits_{x \to 0^+}$ und bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert an der Null.

Hinweis 2:

Denken Sie unbedingt an $a^x = e^{x\ln(a)}$ für alle reellen Zahlen x und alle reellen Zahlen $a > 0$.