LUDWIG-
MAXIMILIANS-
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

BIOZENTRUM DER LMU
DEPARTMENT BIOLOGIE II
COMPUTATIONAL NEUROSCIENCE

Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Grundlagentutorium 3 – Lösungen

Sebastian Groß

Termin	Mittwochs 15:45 – 17:45 | Großer Hörsaal Biozentrum (B00.019)
E-Mail	gross@bio.lmu.de
Sprechzeiten	Montags 12:30 – 13:30 | Donnerstags 12:30 – 13:30
Raum	D01.021
Telefon	(089) 2180 74825

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um keine Musterlösung (außer bei Aufgabe 7), sondern nur um die Endergebnisse welche als Selbstkontrolle dienen sollen. Falls Sie Fragen zur Herleitung der Ergebnisse haben, besuchen Sie bitte das Grundlagentutorium oder kommen Sie zu den Sprechzeiten bei mir vorbei.

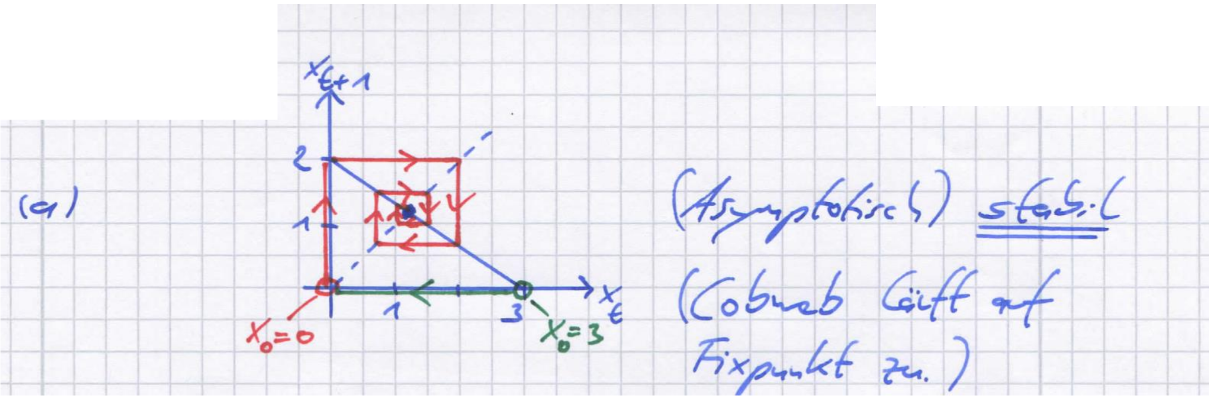
Aufgabe 1 (Wiederholung I: Iterierte Abbildungen [Probeklausur WiSe 15/16])

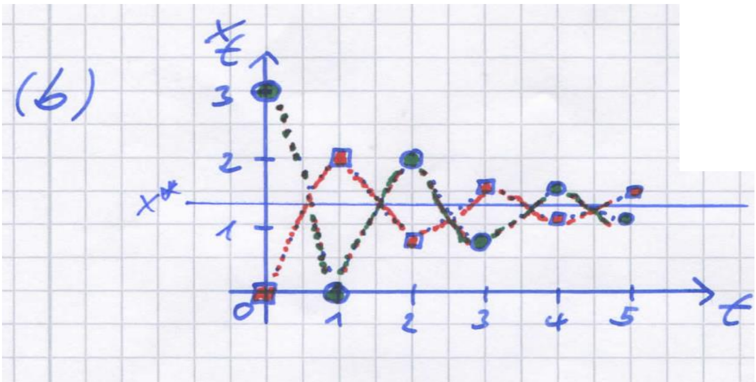
a) x_t: Fischbestand zur Stunde $t \geq 0$

$x_{t+1} = 0{,}9x_t + 10$ mit $x(t = 0) = x_0 \in \mathbb{N}_0$

b) $x^* = \sqrt[3]{2}$ ist (asymptotisch) stabil, da $\left|f'\left(2^{\frac{1}{3}}\right)\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$

Aufgabe 2 (Wiederholung II: Iterierte Abbildungen [Klausur I WiSe 15/16])





(c) $x_{t+1} = m x_t + b$

Da $b = 2$ und $m = \frac{0-2}{3-0} = -\frac{2}{3}$

folgt, dass die gesuchte iterierte Abbildung

$\underline{\underline{h(x_t)}} = x_{t+1} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}x_t + 2}}$ ist.

Aufgabe 3 (Wiederholung III: Iterierte Abbildungen [Wiederholungsklausur WiSe 15/16])

a) x_t: Froschbestand im Jahr $t \geq 0$

$x_{t+1} = 1{,}6x_t - 20$ mit $x(t = 0) = x_0 \in \mathbb{N}_0$

b) Es handelt sich um eine lineare, inhomogene iterierte Abbildung I. Ordnung.

Die eindeutig bestimmte Lösung zum Anfangswertproblem ist $x_t = \frac{200}{3}(1{,}6)^t + \frac{100}{3}$ mit $t \in \mathbb{N}_0$

Aufgabe 4 (Wiederholung IV: Iterierte Abbildungen)

a) $y_{t+1} = ay_t$ und $z_{t+1} = az_t$ seien erfüllt. Dann gilt $w_{t+1} = ay_t + az_t = aw_t$ q. e. d.

b) $y_{t+1} = 4y_t$ und $z_{t+1} = 4z_t - 2$ seien erfüllt. Dann gilt $w_{t+1} = 4y_t + 4z_t - 2 = 4w_t - 2$ q. e. d.

c) Die gesuchte Folge a_n hat die Form $a_n = \frac{5-n}{2}$. Dadurch erhält man das Anfangswertproblem:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2} \quad \text{mit} \quad a_0 = \frac{5}{2}$$

Aufgabe 5 (Definitionsbereich und Ableitungsregeln)

a) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0; 1\}$ mit $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$

b) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$ mit $f'(x) = -\frac{\sin(\ln(x))+\cos(\ln(x))}{x^2}$

c) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2|x|$

d) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ mit $f'(x) = sgn(x-1)$ für $x \neq 1$

Die Ableitung existiert an der Stelle $x = 1$ nicht, da der Differentialquotient an dieser Stelle nicht existiert. Daher ist die Ableitung nur auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ definiert.

e) $f'(x) = x^{(x^{(x)}+x-1)}(x\ln^2 x + x\ln x + 1)$

Aufgabe 6 (Ableitung der Umkehrfunktion)

$$f'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2} \;\text{ für }\; x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

Aufgabe 7 (Taylor-Entwicklung)

Die Taylor-Formel wird verwendet um Funktionen in der Umgebung eines (Entwicklungs-)Punktes durch sogenannte Taylor-Polynome zu approximieren.

Die Taylor-Formel für das n-te Taylor-Polynom am Entwicklungspunkt a lautet:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(a)}{k!}(x-a)^k$$

Das n gibt die Ordnung/den Grad an. Bis zur 4. Ordnung/Grad würde also bis $n = 4$ heißen, also bis einschließlich zur vierten Ableitung entwickeln.

Taylor-Entwicklung von $f(x) = -\ln(1-\frac{x}{2})$ um $a = 0$ bis einschließlich 4. Ordnung.

Musterlösung

Gesucht ist $T_4 f(x)$, also $T_4[-\ln(1-\frac{x}{2})]$

Bis zur 4. Ordnung heißt alle Ableitungen bis einschließlich der vierten bestimmen:

$$f(x) = f^{(0)}(x) = -\ln(1-\tfrac{x}{2})$$

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = \frac{1}{2-x}$$

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{1}{(2-x)^2}$$

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{2}{(2-x)^3}$$

$$f''''(x) = f^{(4)}(x) = \frac{6}{(2-x)^4}$$

Da wir um die Null ($a = 0$) entwickeln, müssen wir dies in jede Ableitung einsetzen:

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = \frac{1}{2} \quad f''(0) = \frac{1}{4} \quad f'''(0) = \frac{1}{4} \quad f''''(0) = \frac{3}{8}$$

Nun kommt der letzte Schritt. Einfach alles in die Summenformel einsetzen, dann vereinfachen:

$$T_4(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} (x-0)^k$$

$$= \frac{f^{(0)}(0)}{0!}x^0 + \frac{f^{(1)}(0)}{1!}x^1 + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

$$= 0 + \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1/4}{2}x^2 + \tfrac{1/4}{6}x^3 + \tfrac{3/8}{24}x^4$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{64} = T_4(x)$$

ist also das gesuchte Taylor-Polynom vierten Grades von f.

Die übrigen Taylor-Polynome erhält man durch Weglassen von Gliedern höherer Ordnung.

So ist also

$T_3(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24}$ dritte Ordnung (= kubische Entwicklung)

$T_2(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$ zweite Ordnung (= quadratische Entwicklung)

$T_1(x) = \frac{x}{2}$ erste Ordnung (= lineare Entwicklung)

$T_0(x) = 0$ nullte Ordnung (= Funktionswert von $f(x) = -\ln(1-\frac{x}{2})$ an der Stelle 0)

Aufgabe 8 (Grenzwerte, Regel von de l'Hospital)

Diese Aufgabe wird im **Grundlagentutorium 4** am **22.11.16** besprochen.