LMU
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
BIOZENTRUM DER LMU
DEPARTMENT BIOLOGIE II
COMPUTATIONAL NEUROSCIENCE

Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Grundlagentutorium 4

Sebastian Groß

Termin	Mittwochs 15:45 – 17:45 | Großer Hörsaal Biozentrum (B00.019)
E-Mail	gross@bio.lmu.de
Sprechzeiten	Montags 12:30 – 13:30 | Donnerstags 12:30 – 13:30
Raum	D01.021
Telefon	(089) 2180 74825

Aufgabe 1 (Grenzwerte, Regel von de l'Hospital)

Hinweis 1:
$\lim\limits_{x \searrow 0}$ ist eine alternative Schreibweise für $\lim\limits_{x \to 0^+}$ und bezeichnet den rechtsseitigen Grenzwert an der Null.
Hinweis 2:
Denken Sie unbedingt an $a^x = e^{x\ln(a)}$ für alle reellen Zahlen x und alle reellen Zahlen $a > 0$.

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+10}{6x-25}$

c) $\lim\limits_{x \searrow 0} x \cdot \ln x$

d) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \frac{2}{x})^{3x}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{3x} - 1)^{x^{-1}}$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 + 5})$

h) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x}{e^x}$

i) $\lim\limits_{x \searrow 0} (1 + \ln x)$

j) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^x - 1)^x$

k) $\lim\limits_{x \to \infty} ((-x) \cdot (-x))$

l) $\lim\limits_{x \to \infty} ((-x) \cdot x^3)$

Bitte wenden!

Aufgabe 2 (Additionstheoreme)

Formulieren Sie die Additionstheoreme für die Sinus- und die Kosinusfunktion. Zeigen Sie mit diesen:

a) $\cos(2x) + \sin^2(x) = \cos^2(x)$

b) $\sin(2x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0$

c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Die letzte Gleichung c) ist bekannt als „trigonometrischer Pythagoras".

Aufgabe 3 (Drei Tangentenprobleme)

Einführung: Beantworten Sie die folgenden zwei Fragen.

Was ist eine Tangente?

Welche Eigenschaft von f liefert uns die Tangente an ihrem Berührpunkt an f, nämlich an $P(x_0/f(x_0))$, wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige Stelle ist die im Definitionsbereich von f liegt?

a) Ermitteln Sie für $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x\,; x \in \mathbb{R}$ die Gleichung der Tangente im Punkt $P(6/?)$.

b) Ermitteln Sie die Gleichung einer zur Geraden $g: y = -x + 1$ parallelen Tangente an den Graphen von $f(x) = -x^2 + x + 4\,; x \in \mathbb{R}$.

c) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten, die man von $Q(0/2)$ aus an den Graphen von $f(x) = -\frac{1}{4}x^2\,; x \in \mathbb{R}$ legen kann.

Aufgabe 4 (Elemente der Kurvendiskussion)

Es ist unwahrscheinlich, dass von Ihnen in einer Klausur eine vollständige Kurvendiskussion abverlangt wird, denn dazu reicht die Zeit nicht aus. Eher ist es so, dass einzelne Elemente der Kurvendiskussion abgefragt werden. Die nachfolgenden Aufgaben demonstrieren wie dies in einer Klausur aussehen könnte.

a) Sei $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + ab & \text{für } x \geq b \\ 3x - x^2 + b - \frac{4}{3} & \text{für } x < b \end{cases}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

i) Für welche a, b ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

ii) Ist f für diese Werte auch differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ von $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$.

c) Zeigen Sie, dass $f(x) = 1 - \frac{8}{e^{2x} + 4}\,; x \in \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zum Punkt $P(\ln(2)\ /\ 0)$ ist.

d) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 27; x \in \mathbb{R}$ durch Erraten einer ganzzahligen Nullstelle und anschließender Polynomdivision.

Bitte wenden!

e) Sei $x \in]-1; 0[\cup]1; \infty[$. Bestimmen Sie alle Intervalle auf denen $f(x) = \ln(\frac{3x}{x^2-1})$ streng monoton fallend ist.

f) Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{k+\ln(kx)}{x}$ mit Scharparameter $k \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}^+$.

   i) Zeigen Sie: Jede Scharkurve hat genau einen Hochpunkt.

   ii) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Hochpunkte liegen.

g) Sei $f(x) = \frac{|x+4|}{x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

   i) Untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x = -4$ differenzierbar ist!

   ii) Für welche $x -$ Werte gilt $f'(x) = -1$?

h) Sei $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$; $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$.

   i) Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von f mit den Koordinatenachsen.

   ii) Bestimmen Sie alle Wendepunkte von f.

Aufgabe 5 (Extremwertproblem I)

Von jeder reellen Zahl x im Intervall $[0\,;\ 1]$ wird ihr Quadrat subtrahiert. Bei welcher Zahl x wird diese Differenz am größten und wie lautet dann die Differenz?

Aufgabe 6 (Extremwertproblem II)

a) Formulieren Sie den **Satz des Pythagoras** inklusive seiner Voraussetzungen. Erklären Sie anhand einer Skizze wie Sie mit diesem Satz den Abstand vom Koordinatenursprung zum Punkt (2 / 3) berechnen können.

b) Zeigen Sie:
Sei $f(x)$ eine in ihrer Definitionsmenge überall differenzierbare Funktion, die nur positive Werte annimmt, dann besitzt $w(x) = \sqrt{f(x)}$ an den gleichen Stellen die gleiche Art von relativen Extrema wie die Funktion $f(x)$.

c) Sei $x \in \mathbb{R}$. Welcher Punkt des Graphen der Funktion $f(x) = 4 - x^2$ im I. Quadranten hat vom Koordinatenursprung minimalen Abstand?