LMU
LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
BIOZENTRUM DER LMU
DEPARTMENT BIOLOGIE II
COMPUTATIONAL NEUROSCIENCE

Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Grundlagentutorium 4 – Lösungen

Sebastian Groß

Termin	Mittwochs 15:45 – 17:45 | Großer Hörsaal Biozentrum (B00.019)
E-Mail	gross@bio.lmu.de
Sprechzeiten	Montags 12:30 – 13:30 | Donnerstags 12:30 – 13:30
Raum	D01.021
Telefon	(089) 2180 74825

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um keine Musterlösung (außer bei den gekennzeichneten Teilaufgaben), sondern nur um die Endergebnisse welche als Selbstkontrolle dienen sollen. Falls Sie Fragen zur Herleitung der Ergebnisse haben, besuchen Sie bitte das Grundlagentutorium oder kommen Sie zu den Sprechzeiten bei mir vorbei.

Aufgabe 1 (Grenzwerte, Regel von de l'Hospital)

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x^2)}{x} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{3x+10}{6x-25} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{x \searrow 0} x \cdot \ln x = 0$

d) $\lim\limits_{x \searrow 0} x^x = 1$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} (1 - \frac{2}{x})^{3x} = \frac{1}{e^6}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} (e^{3x} - 1)^{x^{-1}} = e^3$

Musterlösung

$\lim\limits_{x \to \infty} (e^{3x} - 1)^{x^{-1}}$ liefert den Ausdruck $[\infty^0]$, daher benutzen wir $a^b = e^{b\ln(a)}$:

$$\lim_{x \to \infty} (e^{3x} - 1)^{x^{-1}} = \lim_{x \to \infty} \exp(x^{-1} \ln(e^{3x} - 1))$$

Da die Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ stetig ist, dürfen wir den Limes in die Exponentialfunktion ziehen.

$$\lim_{x \to \infty} \exp(x^{-1} \ln(e^{3x} - 1)) = \exp(\lim_{x \to \infty} (x^{-1} \ln(e^{3x} - 1))) = e^3$$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus:

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(e^{3x}-1)}{x}$ liefert den Ausdruck $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, wir dürfen also die Regel von de l'Hospital anwenden:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(e^{3x}-1)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3e^{3x}}{(e^{3x}-1)}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{(e^{3x}-1)}$$

Weitere Anwendungen von der Regel von de l'Hospital werden hier nicht ans Ziel führen.
Wir sehen aber, dass der **Limes gegen** ∞ geht und ein **Bruch** vorliegt. In diesem Fall benutzen wir den Standardtrick: **Höchste Potenz des Nenners ausklammern!**
(Diesen Trick darf man in der Tat nur anwenden, wenn der Limes gegen $+\infty$ oder $-\infty$ geht und wenn wirklich ein Bruch vorliegt!)
Die höchste Potenz des Nenners ist e^{3x}. Diese wird sowohl im Nenner als auch im Zähler ausgeklammert:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3e^{3x}}{(e^{3x}-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^{3x}(3)}{e^{3x}(1-\frac{1}{e^{3x}})} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{1-1/e^{3x}} = \frac{3}{1-0} = 3$$

Also ist

$$\lim_{x\to\infty} (x^{-1}\ln(e^{3x}-1)) = 3$$

und damit ist

$$\exp(\lim_{x\to\infty} (x^{-1}\ln(e^{3x}-1))) = e^3$$

g) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x-1}-\sqrt{x^2+5}\right) = \frac{1}{2}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x} = 0$

i) $\lim_{x\searrow 0}(1+\ln x) = -\infty$

j) $\lim_{x\to\infty} (e^x-1)^x = \infty$

k) $\lim_{x\to\infty}\left((-x)\cdot(-x)\right) = \infty$

l) $\lim_{x\to\infty}\left((-x)\cdot x^3\right) = -\infty$

Aufgabe 2 (Additionstheoreme)

Musterlösung

Die Additionstheoreme lauten für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

Man beachte, dass die Vorzeichen in den Additionstheoremen nicht beliebig austauschbar sind. Beim Additionstheorem für den Sinus bleibt das Vorzeichen gleich, während es beim Kosinus wechselt.

a) $\cos(2x) + \sin^2(x) = \cos^2(x) \;\leftrightarrow\; \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ und dies folgt aus:

$$\cos(2x) = \cos(x + x) = \cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

q.e.d.

b) $\sin(2x) - 2\sin(x)\cos(x) = 0 \;\leftrightarrow\; \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und dies folgt aus:

$$\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

q.e.d.

c) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (Wichtige Formel!)

$$1 = \cos(0) = \cos(x - x) = \cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x) = \sin^2(x) + \cos^2(x)$$

q.e.d.

Aufgabe 3 (Drei Tangentenprobleme)

Musterlösung

Was ist eine Tangente?

Antwort: Eine Gerade, welche den Graphen der Funktion in genau einem Punkt **berührt.**

Zusatzinfo: Andere Punkte des Graphen der Funktion können von derselben Tangente geschnitten werden, diese haben aber keine weitere Bedeutung. Wichtig ist ausschließlich der Berührpunkt.

Welche Eigenschaft von f liefert uns die Tangente an ihrem Berührpunkt an f, nämlich an $P(x_0/f(x_0))$, wobei $x_0 \in \mathbb{R}$ eine beliebige Stelle ist die im Definitionsbereich von f liegt?

Antwort: Die Steigung von f an der Stelle x_0.

a) Ermitteln Sie für $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x\,; x \in \mathbb{R}$ die Gleichung der Tangente im Punkt $P(6/?)$.

Der Berührpunkt der Tangente kann exakt ermittelt werden. Er liegt bei $f(6) = -\frac{1}{4}36 + 12 = 3$. Also bei $P(6/3)$.

Eine Tangente hat die allgemeine Form $y = mx + b$.

Die Tangentensteigung m ist gleich der Ableitung von f an der Stelle 6.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x + 2 \;\rightarrow\; f'(6) = -1 = m$$

Durch Einsetzen des Punktes und der Steigung in die allgemeine Tangentengleichung erhält man b.

$$3 = -1 \cdot 6 + b \;\leftrightarrow\; b = 9$$

Damit lautet die gesuchte Tangentengleichung

$$y = -x + 9.$$

b) Ermitteln Sie die Gleichung einer zur Geraden $g: y = -x + 1$ parallelen Tangente an den Graphen von $f(x) = -x^2 + x + 4\,; x \in \mathbb{R}$.

Da die Tangente parallel zu $y = -x + 1$ ist, erhält man direkt $m = -1$.

Damit lautet das Problem: Wo hat der Graph von f die Steigung -1?

$f'(x) = -2x + 1$.

Setzen wir dies gleich -1, so erhält man $-2x + 1 = -1 \;\leftrightarrow\; x = 1$.

Der Berührpunkt der Tangente ist damit gegeben durch $f(1) = -(1)^2 + 1 + 4 = 4$, also bei $P(1/4)$.

Einsetzen in die allgemeine Tangentengleichung liefert b:

$4 = -1 \cdot 1 + b \;\leftrightarrow b = 5$ und damit lautet die gesuchte Tangentengleichung

$$y = -x + 5.$$

c) Ermitteln Sie die Gleichungen der Tangenten, die man von $Q(0/2)$ aus an den Graphen von $f(x) = -\frac{1}{4}x^2\,; x \in \mathbb{R}$ legen kann.

Wir könnten die Gleichung einer solchen Tangente sofort angeben, wenn wir ihren Berührpunkt kennen würden. Also gilt es, die Berührungspunkte zu bestimmen!

Sei $P(u/f(u)) = P(u/-\frac{1}{4}u^2)$ Berührpunkt.

Die Steigung der Tangente m ist gleich dem Differenzenquotienten der Punkte P und Q:

$$m = \frac{-\frac{1}{4}u^2 - 2}{u - 0} = \frac{-\frac{1}{4}u^2 - 2}{u}$$

Andererseits ist m gleich der Ableitung von f an der Stelle u:

$$f'(u) = -\frac{1}{2}u = m$$

Durch Gleichsetzen der beiden Terme für m, erhalten wir eine Gleichung für u:

$$\frac{-\frac{1}{4}u^2 - 2}{u} = -\frac{1}{2}u$$

$$\leftrightarrow\; -\frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}u^2 = 2$$

$$\leftrightarrow\; u^2 = 8$$

Damit erhalten wir zwei u, nämlich $u = \pm 2\sqrt{2}$.

Damit kennen wir die Berührungspunkte P_1 und P_2, nämlich $f\left(\pm 2\sqrt{2}\right) = -2$.

Also bei $P_1(2\sqrt{2}/-2)$ und bei $P_2(-2\sqrt{2}/-2)$.

Es können also genau **zwei** Tangenten t_1 und t_2 von Q aus an den Graphen von f gelegt werden.

Gleichung von t_1:

$$m = f'\left(2\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$$

$$-2 = -\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} + b \text{ liefert } b = 2$$

Damit lautet die erste Tangente $t_1 \colon y = -\sqrt{2}x + 2$.

Gleichung von t_2:

$$m = f'\left(-2\sqrt{2}\right) = +\sqrt{2}$$

$$-2 = +\sqrt{2} \cdot (-2\sqrt{2}) + b \text{ liefert } b = 2$$

Damit lautet die zweite Tangente $t_2 \colon y = \sqrt{2}x + 2$.

Hinweis: Man hätte sich in beiden Fällen die Ermittlung von b sparen können, denn in der Aufgabe ist gefragt welche Tangenten man von $Q(0/2)$ aus an den Graphen von $f(x) = -\frac{1}{4}x^2\,; x \in \mathbb{R}$ legen kann. Dadurch ist der $y-$Achsenabschnitt b schon direkt durch Q gegeben, nämlich in beiden Fällen durch $b = 2$.

Aufgabe 4 (Elemente der Kurvendiskussion)

Musterlösung

a) Sei $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + ab & \text{für } x \geq b \\ 3x - x^2 + b - \frac{4}{3} & \text{für } x < b \end{cases}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

   i) Für welche a, b ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

Die einzelnen Teilfunktionen sind als Polynome unabhängig von a, b immer stetig. Es gilt also nur die Stetigkeit an der Nahtstelle $x = b$ zu überprüfen.

Ein Grenzwert

$$\lim_{x \to b} f(x)$$

existiert nur, wenn $\lim_{x \nearrow b} f(x) = \lim_{x \searrow b} f(x)$, also wenn links- und rechtsseitiger Grenzwert übereinstimmen.

Eine Funktion $\boldsymbol{f}$ heißt **stetig an der Stelle $\boldsymbol{b}$** genau dann, wenn gilt:

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

In dieser konkreten Aufgabe müssen also der rechts- und linksseitige Grenzwert gegen b gleich dem Funktionswert von f an der Stelle b sein (Definition von Stetigkeit an der Stelle b).

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow b}(3x - x^2 + b - \frac{4}{3}) = -b^2 + 4b - \frac{4}{3}$$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow b}(2x^2 - ax + ab) = 2b^2.$$

Der Grenzwert

$$\lim_{x \to b} f(x)$$

existiert nur dann, wenn der links- und rechtsseitige Grenzwert übereinstimmen:

$$-b^2 + 4b - \frac{4}{3} = 2b^2$$

$$\leftrightarrow b^2 - \frac{4}{3}b = -\frac{4}{9}$$

$$\leftrightarrow \left(b - \frac{2}{3}\right)^2 = 0$$

$$\leftrightarrow b = \frac{2}{3}$$

Für diesen Wert gilt also:

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}} f(x) = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9}$$

Antwort: f ist stetig auf $\mathbb{R}$, wenn $b = \frac{2}{3}$. Der Wert von a spielt hinsichtlich der Stetigkeit keine Rolle.

ii) Ist f für diese Werte auch differenzierbar auf $\mathbb{R}$?

f kann nur dann differenzierbar sein, wenn f auch stetig ist, deswegen ist durch die erste Teilaufgabe bereits $b = \frac{2}{3}$ festgelegt. Setzen wir dies in die Funktionsgleichung ein:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + \frac{2}{3}a & \text{für } x \geq \frac{2}{3} \\ -x^2 + 3x - \frac{2}{3} & \text{für } x < \frac{2}{3} \end{cases}$$

Die einzelnen Teilfunktionen sind als Polynome unabhängig von a immer differenzierbar. Es gilt also nur die Differenzierbarkeit an der Nahtstelle $x_0 = \frac{2}{3}$ zu überprüfen.

Eine Funktion $\boldsymbol{f}$ heißt **differenzierbar an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$** genau dann, wenn der **Differentialquotient**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und endlich ist.

Es müssen also links- und rechtsseitiger Grenzwert bei $x_0 = \frac{2}{3}$ jeweils existieren, endlich und gleich sein.

Linksseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \nearrow \frac{2}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{2}{3}\right)}{x - \frac{2}{3}} = \lim_{x \nearrow \frac{2}{3}} \frac{-x^2 + 3x - \frac{2}{3} - \frac{8}{9}}{x - \frac{2}{3}} = \lim_{x \nearrow \frac{2}{3}} \frac{-2x + 3}{1} = \frac{5}{3}$$

wobei beim zweiten Gleichheitszeichen wegen $\left[\frac{0}{0}\right]$ die Regel von de l'Hospital angewendet wurde.

Rechtsseitiger Grenzwert:

$$\lim_{x \searrow \frac{2}{3}} \frac{f(x) - f\left(\frac{2}{3}\right)}{x - \frac{2}{3}} = \lim_{x \searrow \frac{2}{3}} \frac{2x^2 - ax + \frac{2}{3}a - \frac{8}{9}}{x - \frac{2}{3}} = \lim_{x \searrow \frac{2}{3}} \frac{4x - a}{1} = \frac{8}{3} - a$$

wobei beim zweiten Gleichheitszeichen wegen $\left[\frac{0}{0}\right]$ die Regel von de l'Hospital angewendet wurde.

Links- und rechtsseitiger Grenzwert sind also genau dann gleich, wenn $\frac{5}{3} = \frac{8}{3} - a \leftrightarrow a = 1$.

Antwort: f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, wenn $a = 1$ **und** $b = \frac{2}{3}$.

b) Bestimmen Sie den Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ von $f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$.

Die Stellen an denen der Nenner verschwindet, gehören nicht zum Definitionsbereich. Es gilt daher:

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

Substituiere $e^x = a$ und erhalte $a^2 - 3a + 2 = 0$. Dies liefert nach quadratischer Ergänzung $\left(a - \frac{3}{2}\right)^2 = -2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$ also $a = \pm\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$ also $a_1 = 2$ und $a_2 = 1$.

Rücksubstitution liefert $e^x = 2$, also $x = \ln(2)$ sowie $e^x = 1$, also $x = 0$.

Damit lautet der Definitionsbereich $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{ 0 ; \ln(2) \}$.

c) Zeigen Sie, dass $f(x) = 1 - \frac{8}{e^{2x}+4}; x \in \mathbb{R}$ punktsymmetrisch zum Punkt $P(\ln(2) / 0)$ ist.

Wichtige Strategie: Wenn $f(x) = 1 - \frac{8}{e^{2x}+4}$ punktsymmetrisch zum Punkt $P(\ln(2) / 0)$ ist, dann muss $g(x) = f(x + \ln(2)) = 1 - \frac{8}{e^{2(x+\ln(2))}+4} = 1 - \frac{8}{e^{2x}e^{\ln(4)}+4} = 1 - \frac{2}{e^{2x}+1} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ punktsymmetrisch zum Ursprung sein. (Wieso? Weil wir f durch eine Transformation in den Ursprung verschoben haben!)

Da $-g(-x) = -\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1} = \frac{-e^{-2x}+1}{e^{-2x}+1} = \frac{\left(-\frac{1}{e^{2x}}\right)+1}{\left(\frac{1}{e^{2x}}+1\right)} = \frac{-1+e^{2x}}{1+e^{2x}} = g(x)$, ist in der Tat f punktsymmetrisch zum Punkt $P(\ln(2) / 0)$.

q.e.d.

d) Bestimmen Sie alle Nullstellen von $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 27; x \in \mathbb{R}$ durch Erraten einer ganzzahligen Nullstelle und anschließender Polynomdivision.

Wenn f eine <u>ganzzahlige</u> Nullstelle x_0 besitzt, dann muss diese **Teiler des absoluten Glieds -27** sein.

In Frage kommen also $\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$. Man errät oder findet schnell $f(-3) = 0$.

Polynomdivision liefert

$$\begin{array}{l}
(2x^3 + 9x^2 - 27) : (x + 3) = 2x^2 + 3x - 9 \\
\underline{-(2x^3 + 6x^2)} \\
\qquad 3x^2 - 27 \\
\qquad \underline{-(3x^2 + 9x)} \\
\qquad\qquad -9x - 27 \\
\qquad\qquad \underline{-(-9x - 27)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Quadratische Ergänzung von $2x^2 + 3x - 9 = 0$ liefert

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} \leftrightarrow x = \pm\frac{9}{4} - \frac{3}{4}$$

Damit lauten alle gesuchten Nullstellen von f:

$$N_{1,2}(-3\ /\ 0) \text{ sowie } N_3\left(\frac{3}{2}\ /\ 0\right).$$

e) Sei $x \in\ ]-1; 0\ [\ \cup\ ]\ 1;\ \infty\ [$. Bestimmen Sie alle Intervalle auf denen $f(x) = \ln(\frac{3x}{x^2-1})$ streng monoton fallend ist.

f ist genau dann monoton fallend, wenn $f'(x) < 0$ gilt.

$$f(x) = \ln(3x) - \ln(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-x^2 - 1}{x(x^2 - 1)} = -\frac{x^2 + 1}{x(x^2 - 1)}$$

Da $-(x^2 + 1) < 0$ für alle x im Definitionsbereich ist, hängt das Vorzeichen nur vom Nenner ab:

Damit $f'(x) < 0$ gilt, muss der Nenner also stets positiv sein! Dies ist genau dann der Fall, wenn beide Faktoren positiv oder beide negativ sind:

$x(x^2 - 1)$ ist im Intervall $]-1; 0\ [$ stets positiv.

$x(x^2 - 1)$ ist im Intervall $]\ 1;\ \infty\ [$ ebenfalls stets positiv.

Antwort: f ist auf dem gesamten Definitionsbereich $x \in\ ]-1; 0\ [\ \cup\ ]\ 1;\ \infty\ [$ streng monoton fallend.

f) Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{k+\ln(kx)}{x}$ mit Scharparameter $k \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}^+$.

i) Zeigen Sie: Jede Scharkurve hat genau einen Hochpunkt.

$$f'_k(x) = \frac{d}{dx}(k + \ln(kx))x^{-1} = \frac{k}{kx^2} - \frac{k + \ln(kx)}{x^2} = \frac{1 - k - \ln(kx)}{x^2}$$

$$f'_k(x) < 0 \ \leftrightarrow\ 1 - k - \ln(kx) < 0 \ \leftrightarrow\ e^{1-k} < kx \ \leftrightarrow \frac{e^{1-k}}{k} < x$$

Man beachte, dass alle Umformungen das Ungleichheitszeichen nicht verändern.

Für $x > \frac{e^{1-k}}{k}$ ist f also streng monoton fallend.

Demnach muss f für $x < \frac{e^{1-k}}{k}$ streng monoton steigend sein.

Demnach muss bei $x = \frac{e^{1-k}}{k}$ ein Hochpunkt vorliegen.

Da es keine weiteren Stellen x gibt wo f das Vorzeichen wechselt, besitzt jede Scharkurve genau einen Hochpunkt.

q.e.d.

(Insbesondere ist in dieser Aufgabe nicht nach der Lage der Hochpunkte gefragt; dies ist Bestandteil der nächsten Teilaufgabe.)

ii) Ermitteln Sie die Gleichung der Ortskurve, auf der alle Hochpunkte liegen.

Die Ortskurve wird durch $y(x) = f_k\left(\frac{e^{1-k}}{k}\right)$ beschrieben. Es gilt:

$$f_k\left(\frac{e^{1-k}}{k}\right) = \frac{k + \ln(e^{1-k})}{\left(\frac{e^{1-k}}{k}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{e^{1-k}}{k}\right)}$$

Da ja gerade $x = \frac{e^{1-k}}{k}$ gilt, lautet die Ortskurve

$$y = \frac{1}{x} \text{ mit } x > 0.$$

g) Sei $f(x) = \frac{|x+4|}{x+2}$ mit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

i) Untersuchen Sie, ob f an der Stelle $x = -4$ differenzierbar ist!

Die betragsfreie Darstellung von f lautet

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+4}{x+2} & -4 \leq x < -2 \text{ oder } -2 < x < \infty \\ \dfrac{-x-4}{x+2} & -\infty < x < -4 \end{cases}$$

Eine Funktion $\boldsymbol{f}$ heißt **differenzierbar an der Stelle $\boldsymbol{x_0}$** genau dann, wenn der **Differentialquotient**

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert und endlich ist.

Es müssen also links- und rechtsseitiger Grenzwert bei $x_0 = -4$ jeweils existieren, endlich und gleich sein.

Linksseitiger Grenzwert:

$\lim\limits_{x \nearrow -4} \frac{f(x)-f(-4)}{x+4} = \lim\limits_{x \nearrow -4} \frac{\left(\frac{-x-4}{x+2}\right)}{x+4} = \lim\limits_{x \nearrow -4} \frac{1}{-x-2} = \frac{1}{2}$

Rechtsseitiger Grenzwert:

$\lim\limits_{x \searrow -4} \frac{\left(\frac{x+4}{x+2}\right)}{x+4} = \lim\limits_{x \searrow -4} \frac{1}{x+2} = -\frac{1}{2}$

Da $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$, ist f bei $x_0 = -4$ **nicht** differenzierbar.

ii) Für welche $x-$Werte gilt $f'(x) = -1$?

Abgesehen von den Stellen $x = -2$ und $x = -4$, ist f überall differenzierbar. Denn die Teilfunktionen bestehen dann aus Quotienten differenzierbarer Funktionen und sind demnach selbst differenzierbar.

Es gilt für die erste Ableitung:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+2)-(x+4)}{(x+2)^2} = \dfrac{-2}{(x+2)^2} & -4 \leq x < -2 \text{ oder } -2 < x < \infty \\ -\dfrac{(x+2)-(x+4)}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{(x+2)^2} & -\infty < x < -4 \end{cases}$$

Offensichtlich kann die erste Ableitung nur im Bereich $-4 \leq x < -2$ oder $-2 < x < \infty$ kleiner als Null werden, denn $(x+2)^2$ ist immer größer als Null. Also brauchen wir nur diesen Abschnitt gleich -1 setzen:

$$\frac{-2}{(x+2)^2} = -1$$

$$\leftrightarrow \; 2 = (x+2)^2$$

$$\leftrightarrow \; x = \pm\sqrt{2} - 2$$

Also erfüllen $x = \sqrt{2} - 2$ und $x = -\sqrt{2} - 2$ die Gleichung $f'(x) = -1$.

h) Sei $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$; $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, +1\}$.

i) Bestimmen Sie die gemeinsamen Punkte von f mit den Koordinatenachsen.

$f(0) = 4 \rightarrow$ Schnittpunkt mit $y-$Achse ist $S_y(0/4)$

Die Nullstellen erhält man durch $x^2 - 4 = 0$, also bei $N_1(-2/0)$ sowie $N_2(2/0)$.

ii) Bestimmen Sie alle Wendepunkte von f.

$$f'(x) = \frac{(2x)(x^2-1)-(x^2-4)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{6(x^2-1)^2 - 6x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{6(x^2-1) - 6 \cdot 4x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{6(x^2-1-4x^2)}{(x^2-1)^3} = \frac{6(-3x^2-1)}{(x^2-1)^3}$$

Die notwendige Bedingung für Wendepunkte verlangt, dass die zweite Ableitung verschwindet:

$$f''(x) = 0$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $-3x^2 - 1 = 0 \leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{3}$.

Dies ist beim Definitionsbereich $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,+1\}$ jedoch unmöglich, und daraus folgt, dass f *keine* Wendestellen besitzt.

Aufgabe 5 (Extremwertproblem I)

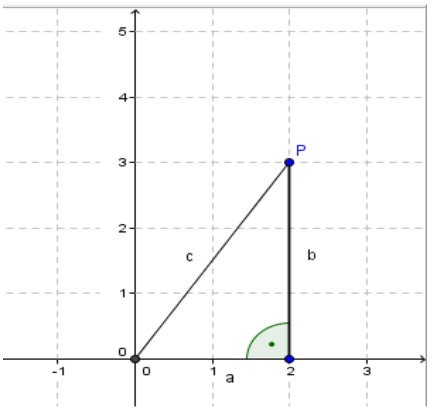
Bei $x = \frac{1}{2}$ wird diese Differenz am größten mit $\frac{1}{4}$ als größter Differenz.

Aufgabe 6 (Extremwertproblem II)

Musterlösung

a) Satz des Pythagoras:

Sei ΔABC ein rechtwinkliges Dreieck mit Katheten a und b und Hypothenuse c, dann gilt: $a^2 + b^2 = c^2$.



Das Dreieck erfüllt die Voraussetzungen des Satz des Pythagoras, und damit berechnet man:

$$c^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

Da Abstände größer-gleich Null sein müssen, erhält man den gesuchten Abstand als $c = \sqrt{13}$.

b) Sei $f(x) > 0$ für alle x im Definitionsbereich von f und f sei überall auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar. Dann gilt:

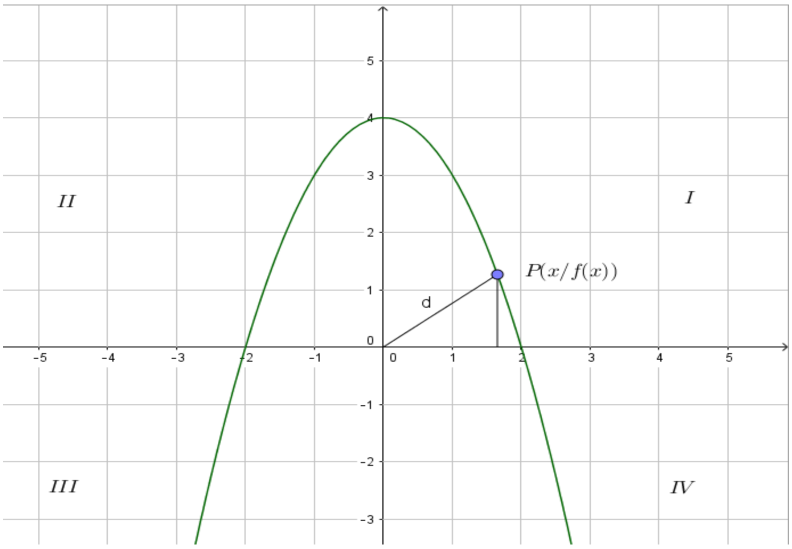
$$w'(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$$

Da der erste Faktor nach Voraussetzung immer größer als Null ist, erhält man:

$$w'(x) = \begin{cases} > 0 \leftrightarrow f'(x) > 0 \\ = 0 \leftrightarrow f'(x) = 0 \\ < 0 \leftrightarrow f'(x) < 0 \end{cases}$$

q.e.d.

c) Zunächst einmal sollte man bei Extremwertproblemen immer eine Skizze anfertigen um sich die Problematik klar zu machen:



Damit ein beliebiger Punkt im I. Quadranten (oder auf den Achsen) liegt, muss also $0 \leq x \leq 2$ sein.

Der Abstand vom Koordinatenursprung zu einem beliebigen Punkt $P(x/f(x))$ welcher auf dem Graphen von f liegt, kann nach Teilaufgabe a) mit dem Satz des Pythagoras ermittelt werden. Es gilt:

$$d^2(x) = x^2 + \left(f(x)\right)^2$$

Da Abstände größer-gleich Null sein müssen erhält man als Lösung

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(f(x)\right)^2} \ ; \ 0 \leq x \leq 2$$

Jetzt kommt Teilaufgabe b) ins Spiel:

Da $x^2 + \left(f(x)\right)^2$ immer größer als Null ist und auf $0 \leq x \leq 2$ differenzierbar ist, muss $d(x)$ an denselben Stellen dieselbe Art (**nicht** denselben Wert!) von relativen Extrema besitzen wie $x^2 + \left(f(x)\right)^2$.

$$h(x) = x^2 + \big(f(x)\big)^2 = x^2 + (4 - x^2)^2$$

besitzt die Ableitung

$$h'(x) = 2x + 2(4 - x^2)(-2x) = 2x(-7 + 2x^2)$$

wobei beim letzten Gleichheitszeichen $2x$ ausgeklammert worden ist.

Die notwendige Bedingung für relative Extrema verlangt, dass die erste Ableitung verschwindet, d.h.

$$h'(x) = 0$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$2x = 0 \text{ oder } (-7 + 2\mathrm{x}^2) = 0$$

$$\leftrightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_{2,3} = \pm\sqrt{\tfrac{7}{2}}$$

Da $x_3 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$ nicht im Definitionsbereich liegt, entfällt diese Stelle.

Untersuchen wir nun die hinreichende Bedingung für relative Extrema: das Vorzeichen der zweiten Ableitung an den kritischen Stellen x_1 und x_2.

$$h''(x) = (-14x + 4x^3)' = -14 + 12x^2$$

$h''(0) = -14 < 0$ $\rightarrow$ relatives Maximum bei 0 $\rightarrow$ entfällt als Lösung, da wir Minima suchen!

$h''(\sqrt{\frac{7}{2}}) = -14 + 12 \cdot \frac{7}{2} = \frac{-28+12\cdot 7}{2} > 0 \rightarrow$ relatives Minimum bei $\sqrt{\frac{7}{2}}$.

Der Abstand vom Koordinatenursprung zu einem Punkt auf dem Graphen von f wird durch d berechnet:

$$d(\sqrt{\tfrac{7}{2}}) = \sqrt{\left(\tfrac{7}{2}\right) + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\tfrac{15}{4}}$$

Wir müssen überprüfen, ob es sich auch um den minimalsten Abstand handelt, d.h. ob bei $\sqrt{\frac{7}{2}}$ ein absolutes Minimum vorliegt. Dazu müssen wir uns die Ränder des Definitionsbereichs anschauen:

Bei $x = 0$ wissen wir, dass ein relatives Maximum vorliegt, deswegen muss der Abstand größer als $\sqrt{\frac{15}{4}}$ sein, wir überprüfen der Vollständigkeit halber trotzdem nochmal den genauen Sachverhalt:

$$d(0) = \sqrt{4^2} = 4 > \sqrt{\tfrac{15}{4}} \quad \text{da} \quad \sqrt{\tfrac{15}{4}} < \sqrt{\tfrac{16}{4}} = 2$$

Bei $x = 2$ *müssen* wir sogar direkt nachrechnen:

$$d(2) = \sqrt{2^2 + (4-4)^2} = 2 > \sqrt{\frac{15}{4}}$$

Damit lautet der gesuchte Punkt $P\left(\sqrt{\frac{7}{2}} \Big/ f\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)\right) = P\left(\sqrt{\frac{7}{2}} \Big/ \frac{1}{2}\right)$ und der minimale Abstand ist gegeben durch $\sqrt{\frac{15}{4}}$ [LE].