Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Grundlagentutorium 5

Sebastian Groß

Termin	Mittwochs 15:45 – 17:45 | Großer Hörsaal Biozentrum (B00.019)
E-Mail	gross@bio.lmu.de
Sprechzeiten	Montags 12:30 – 13:30 | Donnerstags 12:30 – 13:30
Raum	D01.021
Telefon	(089) 2180 74825

Aufgabe 1 (Umkehrbarkeit und Umkehrfunktion)

a) Lesen Sie sorgfältig den Abschnitt **2. 1 Funktionen** im Skript durch (Seite 15-20). Machen Sie sich die Bedeutung der folgenden sechs Begriffe klar: Definitionsbereich, Zielmenge, Wertebereich, injektiv, surjektiv und bijektiv.

b) Wie überprüft man ob eine Funktion auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ umkehrbar ist?

c) Sei

$$f:]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

i) Zeigen Sie, dass f auf $]-1\,;1\,[$ umkehrbar ist.

ii) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ sowie deren Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f^{-1}}$ und ihren Wertebereich $\mathbb{W}_{f^{-1}}$.

Aufgabe 2 (Logarithmus / Logarithmische Darstellung)

Gegeben seien die beiden Funktionen

a) $y(x) = 9^4/x^4$

b) $y(x) = \exp(x) \cdot \exp(2)$

Entscheiden Sie in beiden Fällen, ob man eine semi-logarithmische oder eine doppelt-logarithmische Skalierung verwenden muss, damit der resultierende Graph eine Gerade darstellt. Skizzieren Sie die logarithmitisierten Abbildungen jeweils in ein eigenes geeignetes Koordinatensystem.

Bitte wenden!

Aufgabe 3 (Umgekehrte Kurvendiskussion / „Steckbriefaufgaben“ I)

Das eigentlich Komplizierte an einer umgekehrten Kurvendiskussion ist es die Eigenschaften einer Funktion, welche im „Steckbrief“ verschlüsselt sind, in korrekte mathematische Gleichungen umzuschreiben. Dies wollen wir an dieser Stelle üben.

Nachfolgend soll eine Tabelle mit „Übersetzungshilfen“ für die umgekehrte Kurvendiskussion angefertigt werden. Dabei setzen wir voraus, dass wir nur reelle Polynome betrachten. Ergänzen Sie die Tabelle in der rechten Spalte mit den entsprechenden mathematischen Gleichungen. Orientieren Sie sich dabei an den ersten zwei Beispielen:

Text des „Steckbriefs“ / Funktionscharakterisierung	**Korrespondierende(n) mathematische Gleichung(en)**
…ist ein Polynom 7. Grades, welches zum Ursprung symmetrisch ist.	$f(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3 + dx$
…berührt die x −Achse an der Stelle $x = -3$.	$f(-3) = 0$ und $f'(-3) = 0$ Hinreichende Bedingung: $f''(-3) \neq 0$
…hat einen Sattelpunkt bei $P(2/3)$.	
…geht durch den Punkt $P(1/2)$.	
…ist ein Polynom 10. Grades, welches achsensymmetrisch zur y −Achse ist.	
…schneidet die y −Achse bei 7.	
…schneidet die Gerade $y = 3x - 1$ auf der y −Achse.	
…die Normale zur Tangente an der Stelle $x = 2$ besitzt die Gleichung $3y - x + 2 = 0$.	
…die Tangente bei $P(1/3)$ ist horizontal.	
…hat einen Hochpunkt bei $P(0/2)$.	
…hat eine Nullstelle bei $x = 3$.	
…die Tangente bei $x = 4$ steht orthogonal auf der y −Achse.	
…schneidet die erste Winkelhalbierende bei $x = 2$ senkrecht.	
…hat an der Stelle $x = 2$ dieselbe Steigung wie $f(x) = \ln(x)$.	
…die Wendetangente im Ursprung ist die zweite Winkelhalbierende.	
…hat bei $P(4/3)$ einen Sattelpunkt.	
…berührt die x −Achse bei $x = 0$.	

…die Tangente bei $x = 0$ ist parallel zur Gerade $2y$ =3x+4.	
…schneidet die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 2$.	
…die Tangente bei $x = 3$ ist parallel zur x −Achse.	
…sämtliche Stammfunktionen haben bei $x = -1$ einen Tiefpunkt.	
…sämtliche Stammfunktionen haben bei $x = 2$ einen Wendepunkt.	
…schließt im Intervall $[-1; 0]$ eine vollständig unter der x −Achse liegende Fläche ein mit Flächeninhalt 2.	
…die erste Ableitung wechselt bei $x = 2$ das Vorzeichen von $+$ zu $-$.	
…die Tangente an der Stelle $x = 1$ hat eine Normale, welche durch den Ursprung und $P(2/2)$ verläuft.	
…die Tangente an den Punkt $P(3/4)$ schneidet die x −Achse an der Stelle $x = -2$.	
…die Steigung am Punkt $P(-2/8)$ ist dieselbe wie bei $f(x) = \|x\|$.	

Aufgabe 4 (Umgekehrte Kurvendiskussion / „Steckbriefaufgaben“ II)

a) Bestimmen Sie ein Polynom vierten Grades, dessen Graph im Nullpunkt des Koordinatensystems die Wendetangente mit der Gleichung $y = x$ hat und im Punkt (2 / 4) die Steigung Null.

b) Bestimmen Sie ein zur y −Achse symmetrisches Polynom vierten Grades, dessen Graph durch den Ursprung geht und im Punkt $(1 / -2)$ ein relatives Minimum besitzt.

c) Bestimmen Sie ein Polynom dritten Grades, dessen Graph zum Koordinatenursprung punktsymmetrisch ist, im Intervall [0 ; 1] eine vollständig unter der x −Achse liegende Fläche vom Inhalt 1 einschließt und deren sämtliche Stammfunktionen in $(\frac{1}{2}\sqrt{6}$ / ?) ein relatives Minimum besitzen.