LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

BIOZENTRUM DER LMU
DEPARTMENT BIOLOGIE II
COMPUTATIONAL NEUROSCIENCE

Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Grundlagentutorium 5 – Lösungen

Sebastian Groß

Termin	Mittwochs 15:45 – 17:45 | Großer Hörsaal Biozentrum (B00.019)
E-Mail	gross@bio.lmu.de
Sprechzeiten	Montags 12:30 – 13:30 | Donnerstags 12:30 – 13:30
Raum	D01.021
Telefon	(089) 2180 74825

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um keine Musterlösung (außer bei den gekennzeichneten Teilaufgaben), sondern nur um die Endergebnisse welche als Selbstkontrolle dienen sollen. Falls Sie Fragen zur Herleitung der Ergebnisse haben, besuchen Sie bitte das Grundlagentutorium oder kommen Sie zu den Sprechzeiten bei mir vorbei.

Aufgabe 1 (Umkehrbarkeit und Umkehrfunktion)

Musterlösung

a) Die folgende Schreibweise für Funktionen wird uns immer wieder begegnen:

$$f : X \longrightarrow Y$$
$$x \longmapsto f(x)$$

Dabei bezeichnet X den **Definitionsbereich** von f. Man kann statt X auch $\mathbb{D}_f$ schreiben. Dieser beinhaltet alle x für die f existiert. Es kann sich aber auch nach Einschränkung um eine Teilmenge aller möglichen x handeln.

Das Y bezeichnet die **Zielmenge.** Dies ist die Menge aller Funktionswerte die zugelassen sind. Diese <u>muss</u> in der Aufgabenstellung vorgegeben sein. Wenn sie fehlt, dann nimmt man gewöhnlicherweise $Y = \mathbb{R}$.

Nicht zu verwechseln mit der Zielmenge ist der **Wertebereich** $\mathbb{W}_f$. Während die Zielmenge in der Aufgabe vorgegeben ist, ist der Wertbereich die Menge der **tatsächlich angenommenen** Werte von f. Der Wertebereich ist immer eine Teilmenge der Zielmenge oder gleich der Zielmenge. Der Wertebereich darf daher niemals größer als die Zielmenge sein!

Eine Abbildung heißt **injektiv** auf $\mathbb{D}_f$ wenn zwei verschiedenen $x-$Werten auch stets zwei verschiedene $y-$Werte zugeordnet werden. Mathematisch kann man dies durch strenge Monotonie überprüfen. Eine Funktion ist injektiv, wenn sie auf dem gesamten Definitionsbereich entweder streng monoton steigend *oder* streng monoton fallend ist. f darf also auf dem gesamten Definitionsbereich kein wechselndes Monotonieverhalten aufweisen (also mal fallen und mal steigen).

Eine Abbildung heißt **surjektiv** auf $\mathbb{D}_f$ wenn jedes Element der Zielmenge Y *mindestens* ein Mal von der Funktion f angenommen wird. Mathematisch kann man dies überprüfen durch den Wertebereich. Eine Funktion ist surjektiv, wenn der Wertebereich gleich der Zielmenge ist, d.h. $Y = \mathbb{W}_f$.

Eine Abbildung heißt **bijektiv**, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

Versuchen Sie mit diesem Wissen nun nochmal die Beispiele auf Seite 17 im Skript zu verstehen (unter dem Kasten injektiv, surjektiv, bijektiv).

b) Wie überprüft man ob eine Funktion auf ihrem Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ umkehrbar ist?

Damit eine Funktion auf ihrem Definitionsbereich umkehrbar ist, muss sie bijektiv auf $\mathbb{D}_f$ sein.

c) Sei

$$f :]-1;1[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

i) Zeigen Sie, dass f auf $]-1;1[$ umkehrbar ist.

Um zu zeigen, dass f auf $]-1;1[$ umkehrbar ist, müssen wir zeigen, dass f auf dieser Menge ($\mathbb{D}_f$) auch tatsächlich bijektiv ist.

Zunächst aber, wird erst der Logarithmus etwas vereinfacht:

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \ln\left(\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}(\ln(1-x) - \ln(1+x))$$

<u>Injektivität</u>

Wir müssen zeigen, dass f auf $\mathbb{D}_f$ streng monoton ist.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{1^2 - x^2}\right) = -\frac{1}{1-x^2} < 0 \text{ für alle } x \in]-1;1[$$

$$\Longrightarrow f \text{ ist streng monoton fallend auf } \mathbb{D}_f$$

$$\Longrightarrow f \text{ ist injektiv auf } \mathbb{D}_f$$

Surjektivität

Wir müssen zeigen, dass $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$ gilt.

$$\lim_{x \searrow -1} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \searrow -1} (\ln(1-x) - \ln(1+x)) = \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2}(-\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \nearrow 1} f(x) = \frac{1}{2} \lim_{x \nearrow 1} (\ln(1-x) - \ln(1+x)) = \frac{1}{2}\ln(-\infty) - \frac{1}{2}(2) = -\infty$$

Da f **stetig** ist, folgt, dass $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow f$ ist surjektiv auf $\mathbb{D}_f$

Bijektivität

Da f sowohl injektiv als auch surjektiv ist, ist f auch bijektiv auf $\mathbb{D}_f$.

$\Longrightarrow f$ ist umkehrbar auf $]-1\,;1\,[$

q.e.d.

ii) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$ sowie deren Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f^{-1}}$ und ihren Wertebereich $\mathbb{W}_{f^{-1}}$.

Um die Umkehrfunktion zu finden, müssen wir lediglich die folgende Gleichung nach x auflösen und am Ende x und y vertauschen.

$$y = \frac{1}{2}(\ln(1-x) - \ln(1+x))$$

$$\leftrightarrow 2y = \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

$$\leftrightarrow e^{2y} = e^{\ln(1-x)} e^{\ln\left((1+x)^{-1}\right)}$$

$$\leftrightarrow e^{2y} = \frac{1-x}{1+x}$$

$$\leftrightarrow e^{2y} + e^{2y}x = 1 - x$$

$$\leftrightarrow e^{2y} - 1 = -e^{2y}x - x$$

$$\leftrightarrow e^{2y} - 1 = x(-e^{2y} - 1)$$

$$\leftrightarrow \frac{e^{2y} - 1}{-e^{2y} - 1} = x$$

$$\leftrightarrow x = \frac{1 - e^{2y}}{1 + e^{2y}}$$

Damit lautet die Umkehrfunktion nach Vertauschen der Rollen von x und y:

$$f^{-1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow]-1;1[$$
$$x \longmapsto \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

Dabei ist $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{W}_f = \mathbb{R}$ und $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{D}_f =]-1;1[$.

(Man muss also nur die Definitions- und Wertebereich von Funktion und Umkehrfunktion vertauschen!)

Zusatzinfo: Geometrisch betrachtet, beschreibt die Umkehrfunktion die Spiegelung von f an der ersten (und dritten) Winkelhalbierenden. Eine andere Aufgabenstellung wäre daher z.B. „Finden Sie eine Funktion g, welche nach Spiegelung von f an der ersten Winkelhalbierenden entsteht."

Aufgabe 2 (Logarithmus / Logarithmische Darstellung)

Musterlösung

Bei dieser Art von Aufgabe ist als Erstes auf beiden Seiten ein Logarithmus mit geeigneter Base anzuwenden. Dabei wird die Base so gewählt, dass auf der rechten Seite etwas wegfällt. So sieht man, dass bei a) der Logarithmus zur Base 9 geeignet ist, während bei der b) der natürliche Logarithmus eine geeignete Wahl darstellt. Wenn nach den Umformungen zwei Logarithmen übrig bleiben, benötigt man eine doppelt-logarithmische Skalierung, und wenn ein Logarithmus übrig bleibt, benötigt man eine semi-logarithmische Skalierung.

a) $y(x) = 9^4/x^4$

$$\log_9(y) = \log_9\left(\frac{9^4}{x^4}\right) \leftrightarrow \log_9(y) = \log_9(9^4) - \log_9(x^4) \leftrightarrow \log_9(y) = -4\log_9(x) + 4$$

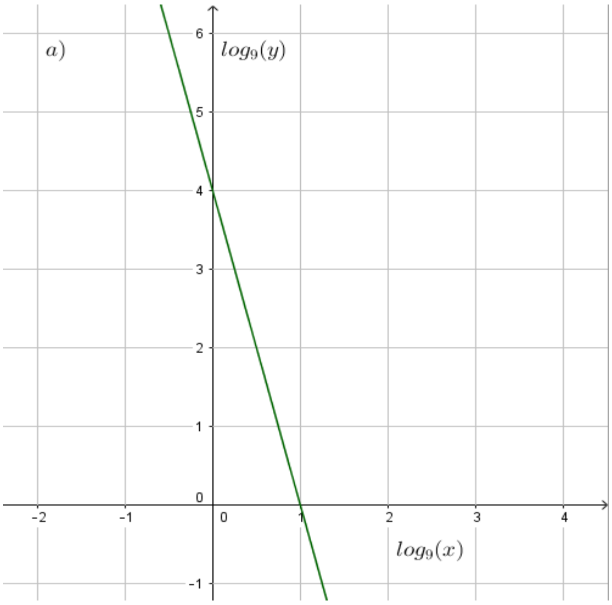
$$\Rightarrow \text{doppelt} - \text{logarithmische Skalierung}$$

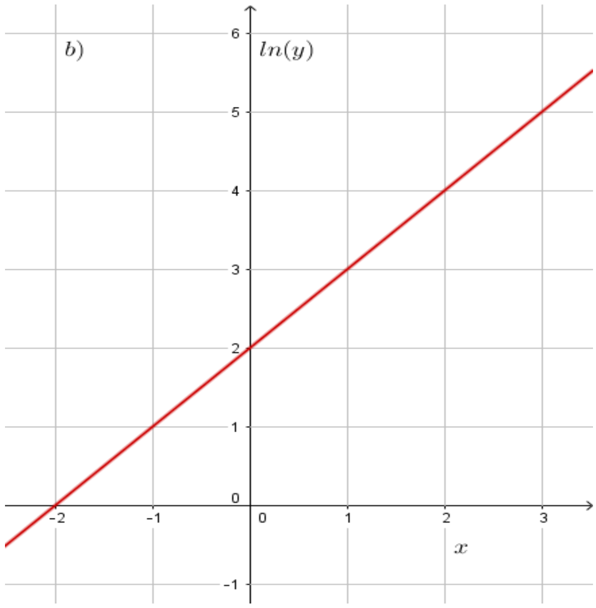
b) $y(x) = \exp(x) \cdot \exp(2)$

$$\ln(y) = \ln(e^x e^2) \leftrightarrow \ln(y) = \ln(e^x) + \ln(e^2) \leftrightarrow \ln(y) = x + 2$$

$$\Rightarrow \text{semi} - \text{logarithmische Skalierung}$$

Skizzen:





Aufgabe 3 (Umgekehrte Kurvendiskussion / „Steckbriefaufgaben“ I)

Musterlösung

Hinweis 1: Falls noch eine hinreichende Bedingung überprüft werden muss, ist dies durch **HB** gekennzeichnet. Die hinreichende Bedingung müsste in einer umgekehrten Kurvendiskussion ganz zum Schluss überprüft werden, wenn $f(x)$ gefunden wurde.

Hinweis 2: Die Koeffizienten a, b, c, d, e, f sind selbstverständlich aus $\mathbb{R}$, da es sich um reelle Polynome handelt.

Text des „Steckbriefs“ / Funktionscharakterisierung	**Korrespondierende(n) mathematische Gleichung(en)**
…ist ein Polynom 7. Grades, welches zum Ursprung symmetrisch ist.	$f(x) = ax^7 + bx^5 + cx^3 + dx$
…berührt die x −Achse an der Stelle $x = -3$.	$f(-3) = 0$ und $f'(-3) = 0$ **HB** $f''(-3) \neq 0$
…hat einen Sattelpunkt bei $P(2/3)$.	$f(2) = 3$ und $f'(2) = 0$ und $f''(2) = 0$ **HB** $f''(2) \neq 0$
…geht durch den Punkt $P(1/2)$.	$f(1) = 2$
…ist ein Polynom 10. Grades, welches achsensymmetrisch zur y −Achse ist.	$f(x) = ax^{10} + bx^8 + cx^6 + dx^4 + ex^2 + f$
…schneidet die y −Achse bei 7.	$f(0) = 7$

...schneidet die Gerade $y = 3x - 1$ auf der y −Achse.	$f(0) = -1$
...die Normale zur Tangente an der Stelle $x = 2$ besitzt die Gleichung $3y - x + 2 = 0$.	$f'(2) = -3$
...die Tangente bei $P(1/3)$ ist horizontal.	$f(1) = 3$ und $f'(1) = 0$
...hat einen Hochpunkt bei $P(0/2)$.	$f(0) = 2$ und $f'(0) = 0$ **HB** $f''(0) < 0$
...hat eine Nullstelle bei $x = 3$.	$f(3) = 0$
...die Tangente bei $x = 4$ steht orthogonal auf der y −Achse.	$f'(4) = 0$
...schneidet die erste Winkelhalbierende bei $x = 2$ senkrecht.	$f'(2) = -1$ und $f(2) = 2$
...hat an der Stelle $x = 2$ dieselbe Steigung wie $f(x) = \ln(x)$.	$f'(2) = \frac{1}{2}$
...die Wendetangente im Ursprung ist die zweite Winkelhalbierende.	$f(0) = 0$ und $f'(0) = -1$ und $f''(0) = 0$ **HB** $f'''(0) \neq 0$
...hat bei $P(4/3)$ einen Sattelpunkt.	$f(4) = 3$ und $f'(4) = 0$ und $f''(4) = 0$ **HB** $f'''(4) \neq 0$
...berührt die x −Achse bei $x = 0$.	$f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$ **HB** $f''(0) \neq 0$
...die Tangente bei $x = 0$ ist parallel zur Gerade $2y$ =3x+4.	$f'(0) = \frac{3}{2}$
...schneidet die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle $x = 2$.	$f(2) = 8$
...die Tangente bei $x = 3$ ist parallel zur x −Achse.	$f'(3) = 0$
...sämtliche Stammfunktionen haben bei $x = -1$ einen Tiefpunkt.	$f(-1) = 0$ **HB** $f'(-1) > 0$
...sämtliche Stammfunktionen haben bei $x = 2$ einen Wendepunkt.	$f'(2) = 0$ **HB** $f''(2) \neq 0$
...schließt im Intervall $[-1; 0]$ eine vollständig unter der x −Achse liegende Fläche ein mit Flächeninhalt 2.	$\int_{-1}^{0} f(x) = -2$
...die erste Ableitung wechselt bei $x = 2$ das Vorzeichen von $+$ zu $-$.	$f'(2) = 0$ **HB** $f''(2) < 0$

…die Tangente an der Stelle $x = 1$ hat eine Normale, welche durch den Ursprung und $P(2/2)$ verläuft.	$f(1) = 1$ und $f'(1) = -1$
…die Tangente an den Punkt $P(3/4)$ schneidet die x −Achse an der Stelle $x = -2$.	$f(3) = 4$ und $f'(3) = \frac{4}{5}$
…die Steigung am Punkt $P(-2/8)$ ist dieselbe wie bei $f(x) = \lvert x \rvert$.	$f(-2) = 8$ und $f'(-2) = -1$

Aufgabe 4 (Umgekehrte Kurvendiskussion / „Steckbriefaufgaben" II)

Hinweis: Die hinreichende Bedingung muss ganz zum Schluss überprüft werden, wenn $f(x)$ gefunden wurde. Ist die hinreichende Bedingung nämlich nicht erfüllt, so haben Sie gezeigt, dass keine Funktion f mit den im Text geforderten Eigenschaften existiert. Es muss also sichergestellt werden, dass f auch wirklich alle Eigenschaften im Text erfüllt.

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{4}x^3 + x\,;\, x \in \mathbb{R}$ und wegen $f'''(0) = \frac{30}{4} \neq 0$ ist die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt im Ursprung erfüllt.

b)

Musterlösung

$$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$$
$$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$$
$$f''(x) = 12ax^2 + 2b$$

$f(0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad I. \quad \boldsymbol{c = 0}$

$f(1) = -2 \quad \Leftrightarrow \quad II. \quad a + b = -2 \quad (\text{da } c = 0)$

$f'(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad III. \quad 4a + 2b = 0$

Aus $II.$ folgt $a = -2 - b$. Dies eingesetzt in $III.$ liefert $4(-2 - b) + 2b = 0$, was sich leicht nach b auflösen lässt zu $\boldsymbol{b = -4}$.

Damit ist $\boldsymbol{a} = -2 + 4 = \mathbf{2}$.

$f(x) = 2x^4 - 4x^2\,;\, x \in \mathbb{R}$ ist also die gesuchte Funktionsgleichung.

Wegen $f'(1) = 12a + 2b = 12 \cdot 2 + 2 \cdot (-4) = 16 > 0$ ist die hinreichende Bedingung für ein relatives Minimum an der Stelle $x = 1$ erfüllt.

c)

Musterlösung

$$f(x) = ax^3 + bx$$
$$F(x) = \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}bx^2$$

$\int_0^1 f(x)dx = -1 \quad \Leftrightarrow \quad I. \quad [\frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}bx^2]_0^1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = -1$

$F'\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = f\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad II. \quad a\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^3 + b\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = 0$

Aus $II.$ folgt nach Teilen durch $\frac{1}{2}\sqrt{6}$, dass

$$a\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \frac{1}{4} \cdot 6 + b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{3}{2}a$$

Setzt man dies in $I.$ ein, so erhält man

$$\frac{1}{4}a + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}a\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a - 3a}{4} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad -2a = -4 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{a = 2}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{b = -3}$$

$f(x) = 2x^3 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$ ist also die gesuchte Funktionsgleichung.

Es ist $F''(x) = f'(x) = 6x^2 - 3$ und wegen $F''\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = 6 \cdot \left(\frac{1}{4} \cdot 6\right) - 3 = 6 > 0$ ist die hinreichende Bedingung für ein relatives Minimum für sämtliche Stammfunktionen an der Stelle $x = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ erfüllt.