Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Grundlagentutorium 7

Sebastian Groß

Termin	Mittwochs 15:45 – 17:45 | Großer Hörsaal Biozentrum (B00.019)
E-Mail	gross@bio.lmu.de
Sprechzeiten	Montags 12:30 – 13:30 | Donnerstags 12:30 – 13:30
Raum	D01.021
Telefon	(089) 2180 74825

Aufgabe 1 (Folgen und Reihen)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a_n = \frac{1}{n} + 2$ sowie $b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^{k+1}}$.

a) Untersuchen Sie formal jeweils die Monotonie.
b) Untersuchen Sie formal jeweils die Beschränktheit.
c) Untersuchen Sie formal jeweils die Konvergenz. Im Falle der Konvergenz, wie lautet dann der Grenzwert?

Aufgabe 2 (Geometrische Reihe)

Berechnen Sie die folgenden Summen.

a) $\sum_{k=2}^{1000} 2^k$ (Sie brauchen 2^{1001} natürlich nicht vereinfachen.)

b) $\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^k 5}{3^{k+1}}$

c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k}$

d) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^{(2k-2)} 5^{(-k+1)}}{2^{(k-2)}}$

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen I)

a) Berechnen Sie den Fixpunkt der Differentialgleichung und bestimmen Sie dessen Stabilität

$$\frac{dV}{dt} + cV - 2c = 0 \qquad (c > 0, \text{Konstante}).$$

Zeichnen Sie dann jeweils qualitativ die Lösung $V(t)$ zu den Anfangsbedingungen

$$V(0) = 0, \qquad V(0) = 1, \qquad V(0) = 2, \qquad V(0) = 3 \quad \text{und} \quad V(0) = 4.$$

b) Wiederholen Sie Aufgabe a), nur dieses Mal gilt $c < 0$.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (Differentialgleichungen II)

Lösen Sie das Anfangswertproblem $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$; $y(x_0) = y_0$

(a) wobei
$$f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \frac{1}{xy}$$

und den expliziten Anfangsbedingungen $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

(b) wobei
$$f : \mathbb{R}\setminus\{k\pi\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \mapsto \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) y + \sin(x)$$

und den expliziten Anfangsbedingungen $x_0 = \frac{3\pi}{2}$, $y_0 = \pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Bestimmen Sie anschließend für jede Teilaufgabe das maximale Existenzintervall I der Lösung $y(x)$.

d.h. die größtmögliche Definitionsmenge I der Funktion $y(x)$.

Aufgabe 5 (Differentialgleichungen III)

a) Zeigen Sie, dass

$$y(x) = x^{-1} - 2x^2 + x^7$$

das Anfangswertproblem

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = 40x^5 \text{ mit } y(1) = 0 \text{ und } y'(1) = 2$$

löst.

b) Wieso löst

$$y(x) = 2x^2 + x^7$$

das Anfangswertproblem

$$y'' - \frac{2}{x^2} y = 40x^5 \text{ mit } y(1) = 0 \text{ und } y'(1) = 2$$

nicht, obwohl $y(x)$ eine spezielle Lösung der Differentialgleichung ist?