Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Grundlagentutorium 7 – Lösungen

Sebastian Groß

Termin	Mittwochs 15:45 – 17:45 | Großer Hörsaal Biozentrum (B00.019)
E-Mail	gross@bio.lmu.de
Sprechzeiten	Montags 12:30 – 13:30 | Donnerstags 12:30 – 13:30
Raum	D01.021
Telefon	(089) 2180 74825

Anmerkung: Es handelt sich hierbei um keine Musterlösung (außer bei Aufgabe 5), sondern nur um die Endergebnisse welche als Selbstkontrolle dienen sollen. Falls Sie Fragen zur Herleitung der Ergebnisse haben, besuchen Sie bitte das Grundlagentutorium oder kommen Sie zu den Sprechzeiten bei mir vorbei.

Aufgabe 1 (Folgen und Reihen)

a) a_n ist streng monoton fallend
b_n ist streng monoton steigend

b) a_n ist beschränkt mit $2 \leq a_n \leq 3$
b_n ist beschränkt mit $\frac{4}{9} \leq b_n \leq \frac{1}{2}$

c) a_n ist konvergent mit Grenzwert 2
b_n ist konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}$

Aufgabe 2 (Geometrische Reihe)

Berechnen Sie die folgenden Summen.

a) $\sum_{k=2}^{1000} 2^k = -4 + 2^{1001}$

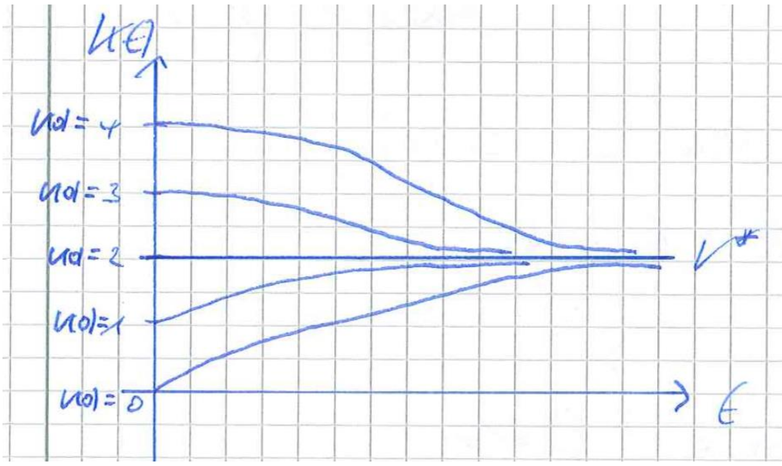
b) $\sum_{k=-1}^{\infty} \frac{(-1)^k 5}{3^{k+1}} = -\frac{15}{4}$

c) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{4 \cdot 2^{k+1}}{3^k} = \frac{32}{3}$

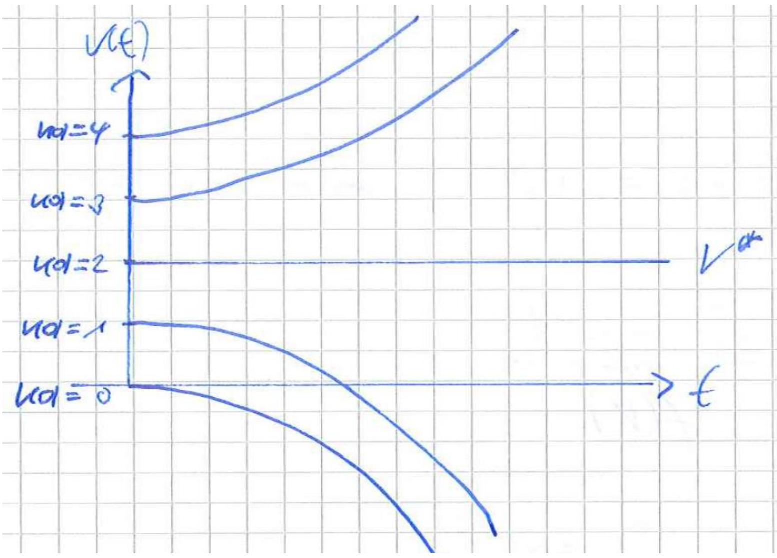
d) $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{3^{(2k-2)} 5^{(-k+1)}}{2^{(k-2)}} = \frac{81}{5}$

Aufgabe 3 (Differentialgleichungen I)

a) $V^* = 2$ ist asymptotisch stabil



b) $V^* = 2$ ist instabil



Aufgabe 4 (Differentialgleichungen II)

a) $y(x) = -\sqrt{2\ln(x) + 1}$ mit $I =]\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty[$

b) $y(x) = \sin(x)\,(x - \frac{5\pi}{2})$ mit $I =]\pi, 2\pi[$

Aufgabe 5 (Differentialgleichungen III)

Musterlösung

a) Die Funktion

$$y(x) = x^{-1} - 2x^2 + x^7$$

erfüllt zunächst beide Anfangsbedingungen, wegen

- $y(1) = 1 - 2 + 1 = 0$ und
- $y'(x) = -\frac{1}{x^2} - 4x + 7x^6$, also $y'(1) = -1 - 4 + 7 = 2$.

Bleibt also nur noch zu überprüfen, ob y auch tatsächlich die DGL löst.

Es gilt $y''(x) = \frac{2}{x^3} - 4 + 42x^5$ und wenn wir alles in die DGL $y'' - \frac{2}{x^2}y = 40x^5$ einsetzen, erhalten wir

$$\frac{2}{x^3} - 4 + 42x^5 - \frac{2}{x^2}(x^{-1} - 2x^2 + x^7) = \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^3} - 4 + 4 + 42x^5 - 2x^5 = 40x^5.$$

Und damit ist y die eindeutig bestimmte Lösung zum Anfangswertproblem. q.e.d.

b) Da nach a) schon die eindeutig bestimmte Lösung zum Anfangswertproblem gefunden wurde, kann die in b) angegebene Lösung unmöglich die Lösung desselben Anfangswertproblems sein.

Alternative: Man sieht, dass *mind.* eine Anfangsbedingung nicht erfüllt ist, z.B. wegen:

$$y(1) = 2 + 1 = 3 \neq 0 \quad ↯$$