Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Verständnistest 5

---

a) Sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto e^x$$

Untersuchen Sie, ob f umkehrbar auf $\mathbb{D}_f$ ist.

b) Übersetzen Sie folgende Funktionscharakterisierung in die korrespondierenden mathematischen Gleichungen und geben Sie an, falls noch eine hinreichende Bedingung überprüft werden müsste wenn Sie den Funktionsterm $f(x)$ ermittelt hätten:

f sei eine ganzrationale Funktion 2. Grades, die zur Ordinatenachse symmetrisch ist. Weiter schneidet f die Abszissenachse an der Stelle $x = \ln(e)$. Einen Schnittpunkt mit der Funktion $g(x) = \cos(x)$ besitzt f auf der y −Achse.

c) Stimmt dies?
Wenn die gesuchte Funktion n −ten Grades ist, dann sind genau $n + 1$ Funktionscharakterisierungen im Steckbrief versteckt.

d) Angenommen Sie haben gerade eine umgekehrte Kurvendiskussion hinter sich gebracht und das $f(x)$ gefunden. Aber leider ist die hinreichende Bedingung nicht erfüllt. Welche Konsequenz können Sie nun daraus ziehen?

Die Lösungen finden Sie auf der nächsten Seite.

Musterlösungen

a) Da bekanntlich $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $\mathbb{W}_f =]0\,;\infty[\neq \mathbb{R} =$ Zielmenge von f.

Also ist f nicht surjektiv und damit ist f nicht bijektiv und natürlich auch nicht umkehrbar.

b) Vokabular:
Abszissenachse $=$ 1. Achse $= x$ $-$Achse
Ordinatenachse $=$ 2. Achse $= y$ $-$Achse

Aufgabenlösung:
$f(x) = ax^2 + b$ (da f zur y $-$Achse symmetrisch)
$f(1) = 0$ (da $\ln(e) = 1$ und hier bei f eine Nullstelle vorliegt)
$f(0) = 1$ (da $f(0) = g(0) = \cos(0) = 1$)

Es müsste keine hinreichende Bedingung überprüft werden, wenn f gefunden worden ist.

Übrigens ist die gesuchte Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 + 1\,; x \in \mathbb{R}$.

c) Diese Aussage gilt **<u>nur</u>** wenn f weder punkt- noch achsensymmetrisch ist. Im Allgemeinen ist die Aussage also falsch.

Gegenbeispiel: siehe b). Hier ist f eine achsensymmetrische Funktion 2. Grades, aber es gibt auch nur zwei Hinweise und nicht drei.

Was aber **immer** gilt ist:

Die Anzahl der versteckten Hinweise ist immer gleich der Anzahl der gesuchten Koeffizienten $(a, b, c, d, e, f, \dots)$ im allgemeinen Funktionsterm für f.

Siehe wieder Beispiel b). Hier sind die Koeffizienten a und b, also gibt es genau 2 Hinweise.

d) Dann hat man gezeigt, dass keine Funktion f existiert, welche alle geforderten Eigenschaften des Steckbriefs gleichzeitig erfüllt.

(Dies könnte eine mögliche Strategie sein wenn die Aufgabenstellung lautet:
Zeigen Sie, dass es keine Funktion f gibt für die gilt, dass…)