Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Verständnistest 7

---

a) Sind Folgen eigentlich Funktionen?

b) Sind -100 und $+100$ Schranken der Folge $a_n = n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$?
Wie lautet der formale Beweis bzw. Widerspruch dafür?

c) Klassifizieren Sie die folgenden Differentialgleichungen nach Ordnung, Linearität und Homogenität.

i) $x' = x$

ii) $y' = (1-y)\ln(x)$

iii) $\gamma t^2 e^x \alpha \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 1$ mit $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}^+$

Geben Sie dann die Definitionsmengen der Differentialgleichungen an.

d) Kann $\mathbb{R}$ das Existenzintervall I einer Lösung einer Differentialgleichung sein? Was ist mit den Intervallen $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ sowie $[0\,;\,\infty[$ sowie $]0\,;\infty[$ und $\mathbb{R}\backslash]-\infty\,;3\,]$?

e) Wie lautet das Lösungsverfahren für folgende Differentialgleichungen?

i) $3x' = \sqrt{x}$

ii) $3x' = t \cdot x + \frac{1}{t}$

f) Beweisen Sie, dass

$$x: \,]0\,;\infty[\, \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \frac{1}{t} + \frac{t}{2}$$

das Anfangswertproblem

$$x' = -\frac{x}{t} + 1 \text{ mit } x(2) = \frac{3}{2}$$

löst.

Musterlösungen

a) Folgen sind Funktionen die auf den natürlichen Zahlen definiert sind. Die Abbildungsvorschrift lautet (z.B.)

$$a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto a(n) = a_n$$

b) -100 ist eine untere Schranke von a_n

Beweis:
$a_n \geq 100 \leftrightarrow n \geq -100$ wahr, da $n \in \mathbb{N}$. q.e.d.

$+100$ ist keine Schranke von a_n

Widerspruch:
$a_{99} = 99$ und a_{101}=101
Es gibt also Folgenglieder die unter und über 100 liegen. Damit kann 100 keine Schranke sein.

c)

i)	$x' = x$	mit $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$
ii)	$y' = -\ln(x)y + \ln(x)$	mit $x \in \mathbb{R}^+$ und $y \in \mathbb{R}$
iii)	$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\gamma t^2 e^x \alpha}$	mit $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und $x \in \mathbb{R}$

d) Ein Existenzintervall darf nur ein einziges, offenes Intervall sein.

$\mathbb{R}$	Ja
$\mathbb{R}\backslash\{0\}$	Nein
$[0\,;\,\infty[$	Nein
$]0\,;\infty[$	Ja
$\mathbb{R}\backslash]-\infty\,;3] =]3;\infty[$	Ja

e)

i)	$x' = \frac{1}{3}\sqrt{x}$	Separation der Variablen (da nicht-lineare DGL I. Ordnung)
ii)	$x' = \frac{1}{3}t \cdot x + \frac{1}{3t}$	Variation der Konstanten (da lineare, inhomogene DGL I. Ordnung)

f) Da $x(2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$ ist die Anfangsbedingung schon mal erfüllt. Bleibt noch zu zeigen, dass auch die DGL erfüllt ist.

Die linke Seite lautet $x'(t) = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}$.

Die rechte Seite lautet $-\frac{x(t)}{t} + 1 = -\frac{\frac{1}{t}+\frac{t}{2}}{t} + 1 = -\frac{2+t^2}{2t^2} + 1 = \frac{-2-t^2+2t^2}{2t^2} = \frac{-2+t^2}{2t^2} = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}$.

Da die linke gleich der rechten Seite ist, erfüllt $x(t)$ in der Tat das angegebene Anfangswertproblem.

q.e.d.