Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Verständnistest 8

---

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ ist eine 3×2 –Matrix. Stimmt dies?

b) Berechnen Sie, falls definiert, $A\vec{x}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = (2, 3, 1)^T$.

c) Seien A und B zwei 2×2 –Matrizen. Finden Sie ein Beispiel das zeigt, dass die Matrizenmultiplikation im Allgemeinen **nicht kommutativ** ist.

d) Sei $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $((E \cdot C)^T \cdot E)^T$.

e) Finden Sie eine Drehmatrix $D(\alpha)$, die einen Vektor im $\mathbb{R}^2$ um den Winkel α dreht – und zwar dieses Mal **im** Uhrzeigersinn.

f) Wahr oder falsch:
Ein lineares Gleichungssystem (LGS) kann **genau eine**, **unendlich viele** oder **gar keine** Lösung besitzen?

g) Was ist der Unterschied zwischen $\mathbb{L} = \{\quad\} = \emptyset$ *und* $\mathbb{L} = \{\emptyset\}$?

h) Was ist hier **falsch**?

$$\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 3 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array} \quad \Rightarrow$$

x	y		EZU
2	**1**	3	-1
2	1	3	1
0	0	0	0

$$\Rightarrow \begin{array}{lccccc} I. & 2x & + & y & = & 3 \\ II. & & & 0 & = & 0 \quad ↯ \end{array}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

i) Schreiben Sie das folgende LGS in Matrizenform $A\vec{x} = \vec{b}$.

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & - & z & = & 1 \\ 3x & + & z & + & 3y & = & 8 \end{array}$$

Die Lösungen finden Sie auf der nächsten Seite.

Musterlösungen

a) Dies stimmt nicht, denn A ist eine $2\times 3 -$ Matrix (2 Zeilen, 3 Spalten).

b) $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) Zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Es gilt dann nämlich $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} = BA$.

d) Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element bezüglich der Matrizenmultiplikation, daher gilt

$$((E \cdot C)^T \cdot E)^T = ((C)^T \cdot E)^T = (C^T \cdot E)^T = (C^T)^T = C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

e) $D(-\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(-\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Das letzte Gleichheitszeichen folgt aus der Tatsache, dass der Kosinus achsensymmetrisch bzgl. der y −Achse und der Sinus punktsymmetrisch bzgl. des Ursprungs ist.

f) Wahr.

g) $\mathbb{L} = \{\quad\} = \emptyset$ beschreibt die **leere Menge** *und* $\mathbb{L} = \{\emptyset\}$ beschreibt die **ein-elementige Menge**, welche die leere Menge als einziges Element enthält. $\mathbb{L} = \{\emptyset\}$ ist also **keine** leere Menge.

h) Die Gleichung II. liefert gar keinen Widerspruch, denn $0 = 0$ ist immer wahr für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Sei also z.B. $\boldsymbol{x = t}$ mit $t \in \mathbb{R}$, dann folgt $\boldsymbol{y = 3 - 2t}$. Die Lösungsmenge lautet also $\mathbb{L} = \{\ (\ t \mid 3 - 2t\ )\ ;\ t\ \in \mathbb{R}\ \}$ oder jede andere Parameterdarstellung derselben Geraden des $\mathbb{R}^2$.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$