Mathematik für Studierende der Biologie – Wintersemester 2017/18

Verständnistest 9

---

a) Gegeben sei eine lineare Differentialgleichung n −ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wie viele freie Parameter wird die allgemeine Lösung dieser DGL haben?

b) Sie haben bei einer linearen Differentialgleichung 3-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten nach Exponentialansatz die Nullstellen des Polynoms $p(\lambda)$ ermittelt. Es gibt nur die 1 als dreifache Nullstelle. Wie lautet die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser DGL? Wie viele freie Parameter gibt es?

c) Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass $\det(A) = 2$ mit $A = \begin{pmatrix} a & 9 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

d) Ist folgende Aussage wahr oder falsch? Beweisen oder widerlegen Sie ihre Behauptung.

Seien A, B, C drei beliebige, reelle 3×3 −Matrizen, dann gilt:

$$\det(ABC) = \det(A)\det(B)\det(C)$$

e) Berechnen Sie folgende Determinante.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

f) Man kann ein lineares Gleichungssystem der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ durch Inversion der Matrix A lösen. Wie lautet die resultierende Gleichung? Nennen Sie einen wesentlichen Nachteil dieses Matrixinversionsverfahrens gegenüber dem Gauß'schen Eliminationsverfahren.

g) Wie viele (nicht notwendigerweise) verschiedenen Determinanten müssen mit der Cramer'schen Regel theoretisch berechnet werden, um zu bestimmen, dass ein lineares Gleichungssystem mit n Variablen eindeutig lösbar ist?

h) Wie viele (nicht notwendigerweise) verschiedenen Determinanten müssen mit der Cramer'schen Regel theoretisch berechnet werden, um ein eindeutig lösbares Gleichungssystem mit n Variablen zu lösen?

i) Wieso ist folgendes LGS nicht durch Matrixinversion lösbar?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Musterlösungen

a) Die allgemeine Lösung wird n freie Parameter $C_1, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ haben.

b) Die allg. Lösung lautet $x(t) = C_1 e^t + C_2 t e^t + C_3 t^2 e^t$ mit drei freien Parametern $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

c) $\det(A) = 2a - 9 \cdot 0 = 2a$ muss gleich 2 sein, also $2a = 2 \quad \leftrightarrow \quad a = 1$

d) Dies ist wahr und folgt sofort nach zweimaliger Anwendung des Multiplikationssatzes für Determinanten.

$$\det(ABC) = \det\big((AB)(C)\big) = \det(AB)\det(C) = \det(A)\det(B)\det(C) \qquad \textit{q.e.d.}$$

e) Da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt, ist die Determinante das Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen, also $\det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 9 = 9$.

f) A^{-1} von **links** multiplizieren liefert $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.
Mögliche Nachteile:
- A^{-1} muss existieren, Gauß funktioniert jedoch immer.
- Bei großen Koeffizientenmatrizen A wird der Rechenaufwand für A^{-1} schnell sehr groß im Vergleich zu Gauß.

g) Eine Determinante.

h) $n + 1$ Determinanten.

i) Die Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ hat Determinante 0 und ist daher nicht invertierbar.