LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

PROF. ANDREAS HERZ, DR. STEFAN HÄUSLER
DEPARTMENT BIOLOGIE II
GROSSHADERNERSTR. 2
82152 PLANEGG-MARTINSRIED

EMAIL: HAEUSLER@BIOLOGIE.UNI-MUENCHEN.DE
TELEFON: 089-2180-74800
FAX: 089-2180-74803

1. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 18.10.2017

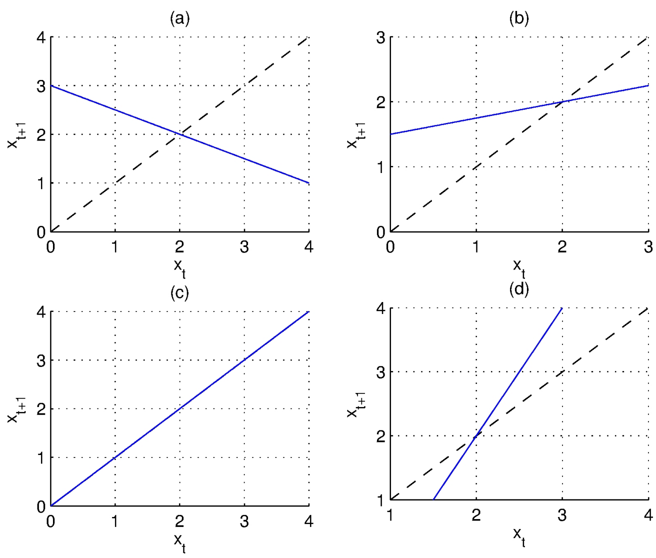
Abgabe am 24.10.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 26. und 27. Oktober besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

Für die Tutorien zur Vorlesung gilt folgender Ablauf:

- Vor jeder Mittwochsvorlesung werden Übungsblätter ausgeteilt, welche von den Studierenden innerhalb einer Woche gelöst werden. Die Lösungen werden zu Beginn der jeweils nächsten Dienstagsvorlesung abgegeben und anschließend von den Tutoren korrigiert. Die Abgabe der Lösungen ist nicht verpflichtend, wird aber empfohlen.
- Die abgegebenen Lösungen sollen mit dem Namen Ihrer Tutorin/Ihres Tutors und dem Termin ihres Tutoriums versehen werden.
- In der ersten Woche werden 2 Übungsblätter ausgegeben. Das 0. Übungsblatt wird in den Tutorien vom 19. und 20. Oktober besprochen. Lösungen zum 1. Übungsblatt können am 24. Oktober abgegeben werden und werden in den Tutorien vom 26. und 27. Oktober besprochen.
- Lösungen zu den Übungsblättern werden zeitversetzt online gestellt.

---

1. (Lineare Iterierte Abbildung) [1 P]
Man betrachte folgende iterierte Abbildungen, in denen jeweils der Graph einer linearen Iterationsfunktion und die Winkelhalbierende als *gestrichelte* Linie dargestellt wird:



(a) Markieren Sie die Fixpunkte in den vier Abbildungen oben. Welche der entsprechenden Fixpunktlösungen sind stabil, welche instabil?

(b) Skizzieren Sie die Entwicklung von x_t als Funktion der Zeit für alle vier Abbildungen. Dabei sollen Sie die Anfangsbedingungen $x = -1$ und $x = +1$ einsetzen.

(c) Betrachten Sie nun die drei iterierten Abbildungen:

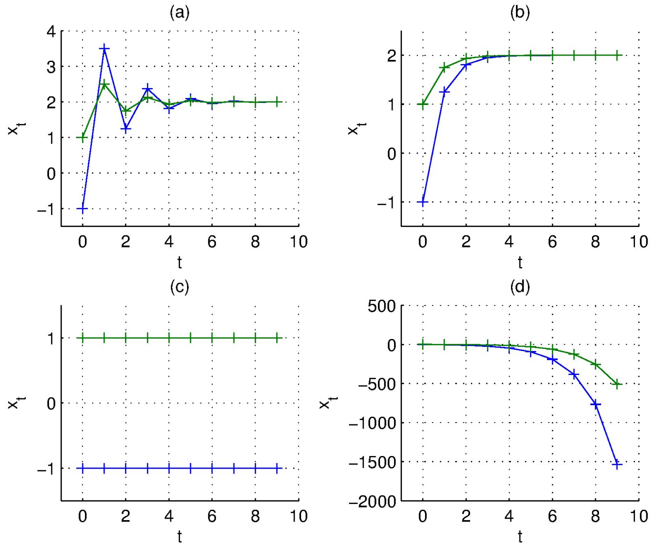
$$f(x_t) = x_{t+1} = 0.25\ x_t + 1.5 \qquad g(x_t) = x_{t+1} = -0.5\ x_t + 3 \qquad h(x_t) = x_{t+1} = 2\ x_t - 2$$

Welchem der Graphen (a) - (d) lassen sich $f(x_t)$, $g(x_t)$ und $h(x_t)$, wenn überhaupt, zuordnen?

Lösung:

(a) (a) asymptotisch stabil, (b) asymptotisch stabil, (c) marginal stabil, aber nicht asymptotisch stabil, (d) instabil

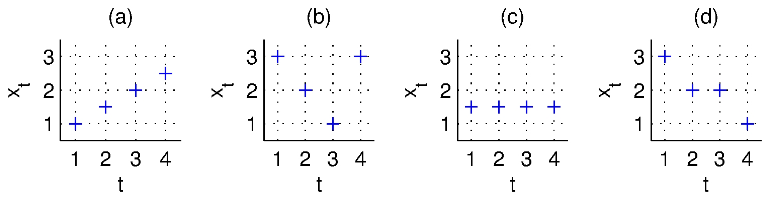
(b)



(c) (a): $g(x_t)$; (b) $f(x_t)$; (c) keinem, da $x_{t+1} = x_t$; (d) $h(x_t)$

---

2. (Iterierte Abbildung) [1 P]



Bei Experimenten zum Wachstum einer Zellkultur sind vier unterschiedliche Messreihen aufgenommen worden. Versuchen Sie in jedem der vier Fälle eine iterierte Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ zu finden, welche die Daten beschreibt. Gelingt dies in allen Fällen? Ist die Lösung eindeutig?

Lösung:

(a) $f(x) = x + 0.5$, $x_1 = 1$.

(b) $f(x) = x - 1$, außer für $x = 1$, dann $f(1) = 3$.

(c) Alle iterierten Abbildungen die $x_t = 1.5$ auf $x_{t+1} = 1.5$ abbilden, e.g. $f(x) = x$, $x_1 = 1.5$.

(d) Nicht möglich, da $x_2 = x_3$, aber $x_3 \neq x_4$.

Die Funktion $f(x_t)$ wird durch die Folgen in (a), (b) und (c) nur jeweils an den Punkten $\{1, 1.5, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ und $\{1.5\}$ definiert und kann für andere Punkte beliebig gewählt werden. Die Lösung einer Iterierte Abbildung bei vorgegebener Anfangsbedingung x_1 ist eine Folge $(x_t)_{t \in \mathbb{N}}$. Die Lösungen zu (b) und (c) sind eindeutig, da x_t für alle $t > 4$ eindeutig bestimmt ist. Die Lösung zu (a) ist nicht eindeutig definiert, da die Funktionwerte $f(x_t)$ nur an den Punkten $x_t \in \{1, 1.5, 2\}$ gegeben sind und für andere x_t, im Speziellen für $x_t = 2.5$, beliebig gewählt werden können.

---

3. (Iterierte Abbildung) [1 P]

Die Lösung einer Iterierten Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ zirkuliert periodisch durch die Werte 2, 4, 8, 16 und wieder 2 (u.s.w.).

(a) Durch welche Punkte muss der Graph von f gehen? Tragen Sie diese Punkte in ein x_{t+1}-x_t Diagramm ein.

(b) Wie lautet eine einfache Funktion f, die diese Eigenschaft aufweist?

(c) Versuchen Sie nun eine iterierte Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ mit Anfangsbedingung $x_0 = 0$ zu finden, sodass die zeitliche Entwicklung von x_t eine periodische Funktion der Zeit und die Periode eine natürliche Zahl $n > 2$ ist.

(d) Ist dies für alle natürlichen Zahlen n möglich?

Lösung:

(a) Wir verwenden für Punkte die Notation $(x_t, f(x_t))$. Der Graph von f muss durch die Punkte $(2, 4)$, $(4, 8)$, $(8, 16)$ und $(16, 2)$ gehen.

(b) Z.B.: $f(x_t) = 2$ falls $x_t = 16$ und $f(x_t) = 2\ x_t$ anderenfalls. Wir setzen $x_0 = 2$.

(c) Für $x_0 = 2$:
Z.B.: $f(x_t) = 2$ falls $x_t = 2^n$ und $f(x_t) = 2\ x_t$ anderenfalls.
Für $x_0 = 0$:
Z.B.: $f(x_t) = 0$ falls $x_t = n + x_0$ und $f(x_t) = x_t + 1$ anderenfalls.

(d) Ja, siehe (c) für $n > 0$ (Periode 0 ausgenommen).

---

4. (Lineare Iterierte Abbildung) [2 P]

Fruchtfliegen (*Drosophila melanogaster*) lassen sich sehr einfach in einem großen Glas züchten. Wenn die Anzahl der Fruchtfliegen x_n am Tag n noch nicht zu groß ist, dann kann das Wachstum der Fruchtfliegenpopulation durch folgende Iterierte Abbildung näherungsweise beschrieben werden: [1 P]

$$x_{n+1} = a x_n, \quad a = 1.12\ .$$

(a) Skizzieren Sie den Graphen der Iterierten Abbilung zusammen mit der Winkelhalbierenden sowie die Zeitentwicklung der Fliegenpopulation für den Fall $x_0 = 100$ und $t = 0, ..., 5$.

(b) Geben Sie eine explizite Lösung x_n für beliebige x_0 an!

(c) Wie wird sich die Fliegenpopulation langfristig entwickeln? Ist das realistisch?

Nun werden jeden Tag eine feste Anzahl Fliegen b als Futter für Pfeilgiftfrösche eines Terrariums entnommen. [1 P]

(d) Wie lautet nun die Iterierte Abbildung?

(e) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Iterierten Abbilung zusammen mit der Winkelhalbierenden an für den Fall, dass täglich 10 Fliegen entnommen werden.

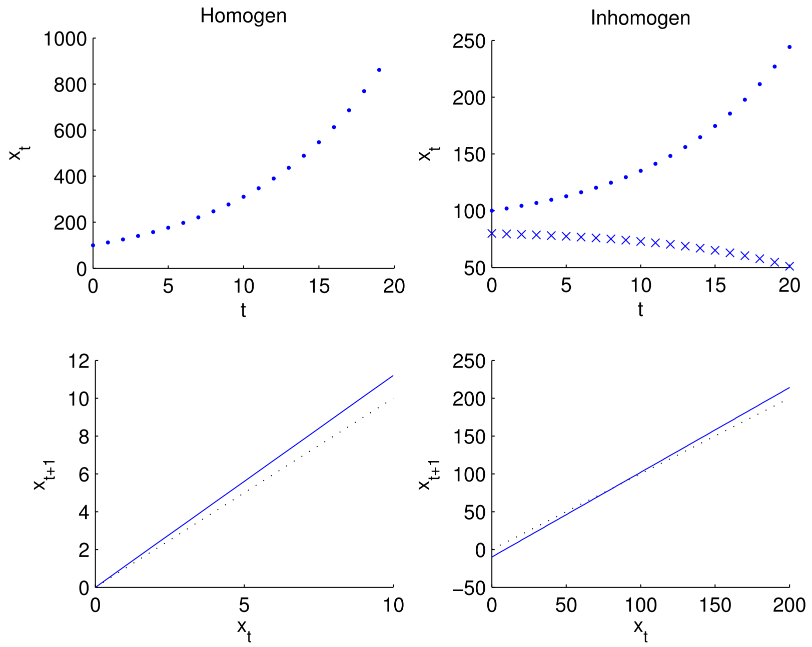
(f) Skizzieren Sie für diesen Fall die Zeitentwicklung der Fliegenpopulation für zwei sinnvoll gewählte Anfangsbedingungen x_0.

(g) Hat die Iterierte Abbildung einen Fixpunkt? Ist er stabil oder instabil?

(h) Wieviele Fliegen müssen mindestens vorhanden sein, damit die Population nicht ausstirbt?

Lösung:

(a)



(b) $x_n = a^n x_0 = 1.12^n x_0$

(c) $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$

Nun werden jeden Tag eine feste Anzahl Fliegen b als Futter für Frösche eines Terrariums entnommen.

(d) $x_{n+1} = ax_n - b, x_0 = 100$, $a = 1.12$

(e) Fertigen Sie eine Skizze des Graphen der Iterierten Abbilung zusammen mit der Winkelhalbierenden an.

(f) Siehe a.

(g) $x_{n+1} \geq ax_n - b \;\Rightarrow\; x^* = \frac{b}{a-1} = \frac{25}{3}b \approx 8.33\,b$ für $a > 1$ (wie gegeben) ist x^* instabil.

(h) $x = \frac{25}{3}b \approx 8.3\,b$