LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
Department Biologie II
Grosshadernerstr. 2
82152 Planegg-Martinsried

email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Telefon: 089-2180-74800
Fax: 089-2180-74803

2. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 25.10.2017

Abgabe in den Tutorien. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 2. und 3. November besprochen.
Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Iterierte Abbildung) [1 P]

Zusammenhang zwischen den Lösungen einer inhomogenen linearen Iterierten Abbildung $x_{t+1} = ax_t + b$.

(a) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Differenz $y_t = v_t - w_t$ der Folgenglieder v_t und w_t zweier beliebiger Lösungen der inhomogenen Abbildung (mit $v_{t+1} = av_t + b$ und $w_{t+1} = aw_t + b$) die zugeordnete homogene Iterierte Abbildung $y_{t+1} = ay_t$ erfüllt.

(b) Die allgemeine Lösung dieser homogenen Abbildung ist $h_t = Ca^t$ wobei C eine beliebige reellwertige Konstante ist. Zeigen Sie durch Einsetzen, dass h_t die homogene Abbildung auch wirklich löst.

(c) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die konstante Lösung, $(x_t^*)_{t\in N}$ mit $x_t^* = b/(1-a)$ für $a \neq 1$ eine einfache spezielle Lösung der inhomogenen Abbildung ist.

(d) Verwenden Sie die Aussage von (a) um zu zeigen, dass die Folgenglieder w_t der allgemeinen Lösung der inhomogenen Abbildung als $w_t = x_t^* + h_t$ geschrieben werden können.

(e) Wie muss die Konstante C gewählt werden, damit w_0 einem vorgegebenen Startwert x_0 entspricht?

(f) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für w_t mit dem in der Vorlesung hergeleiteten Ergebnis (graue Box unter Gleichung 6.9 im Skript).

Lösung:

(a) $y_{t+1} = v_{t+1} - w_{t+1} = (av_t + b) - (aw_t + b) = a(v_t - w_t) = ay_t$

(b) Aus $y_{t+1} = ay_t$ folgt $h_{t+1} = ah_t$ und $Ca^{t+1} = aCa^t = Ca^{t+1} \implies$ wahr.

(c) Aus $x_{t+1}^* = ax_t^* + b$ mit $x_{t+1}^* = x_t^* = b/(1-a)$ folgt $b/(1-a) = a\,(b/(1-a)) + b \implies 1 = 1 \implies$ wahr.

(d) w_t und x_t^* sind Lösungen der inhomogenen Abbildung (v_t und w_t in (a)). Daher ist die Differenz gleich h_t (y_t in (a)).

(e) Aus $w_t = x_t^* + h_t = b/(1-a) + Ca^t$ mit $w_0 = x_0$ folgt $x_0 = b/(1-a) + C$ und $C = x_0 - b/(1-a)$.

(f) Aus $w_t = b/(1-a) + Ca^t = b/(1-a) + (x_0 - b/(1-a))\,a^t$ folgt $w_t = x_0 a^t + b(1-a^t)/(1-a)$.

---

2. (Ableitungsregeln) [2 P]

Berechnen Sie die erste Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f$ der Funktionen

(a) $f(x) = x + 2$	(b) $f(x) = 4\,x$	(c) $f(x) = x^3/6 + 2/x$
(d) $f(x) = \sqrt{x}\,(x+1)\,e^x$	(e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$	(f) $f(x) = x^2 \cdot e^x$
(g) $f(x) = \log_2 x$	(h) $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$	(i) $f(x) = e^{-1/x^2}$
(j) $f(x) = \ln(42 \cdot k)$	(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}}$	(l) $f(x) = \log_{42}(42^{e^x})$
(m) $f(x) = (\ln x)\ln(\ln x) - \ln x$	(n) $f(x) = \log_a \left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$	(o) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Lösung:

(a) $f'(x) = 1$	(b) $f'(x) = 4$	(c) $f'(x) = x^2/2 - 2/x^2$
(d) $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 5x + 1}{2\sqrt{x}}\, e^x$	(e) $f'(x) = -(2/x^3)$	(f) $f'(x) = (2x + x^2)e^x$
(g) $f'(x) = \dfrac{1}{\ln 2 \cdot x}$	(h) $f'(x) = \dfrac{1}{x-3}$	(i) $f'(x) = \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}$
(j) $f'(x) = 0$	(k) $f'(x) = \dfrac{-x}{(x^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$	(l) $f'(x) = e^x$
(m) $f'(x) = (\ln(\ln x))/x$	(n) $f'(x) = \dfrac{2a}{(a^2 - x^2)\ln a}$	(o) $f'(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{x(1+\sqrt{x})}}$

---

3. (Extremwerte) [2 P]

Bestimmen Sie die Extremwerte der untenstehenden Funktionen.

(a) $f(x) = x\,(1-x)$	(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x}{x^2 - 4}$
(c) $f(x) = \ln(x + x^{-1})$	(d) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{1}{2}\Big(e^x + e^{-x}\Big)$

Lösung:

(a) $f(x) = x(1-x)\,;\, f'(x) = 1 - 2x\,;\, f''(x) = -2$
$f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = 1/2 \Rightarrow f''(x_E) < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum; da $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$ ist $(1/2, 1/4)$ auch globales Maximum

(b) Trick: $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x}{x^2 - 4} = \dfrac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{x}{x-2}\,;\, f'(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2}\,;\, f''(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$
$f'(x_E) \neq 0\ \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow$ keine lokalen Maxima/Minima

(c) $f(x) = \ln(x + x^{-1});\ f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x(x^2+1)}\,;\, f''(x) = \dfrac{-x^4 + 4x^2 + 1}{x^2(x^2+1)^2}$

$f'(x_E) = 0 \Rightarrow x_E = \pm 1$ wobei -1 nicht im Definitionsbereich liegt $\Rightarrow f''(x_E = 1) > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum; da $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, ist $(1, \ln 2)$ auch globales Minimum

(d) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{1}{2}\Big(e^x + e^{-x}\Big);\ f'(x) = \sinh(x) = \dfrac{1}{2}\Big(e^x - e^{-x}\Big);\ f''(x) = \cosh(x) = \dfrac{1}{2}\Big(e^x + e^{-x}\Big)$
$f'(x_E) = 0$ und $f''(x_E) = 1$ für $x_E = 0 \Rightarrow$ ein globales Minimum bei $x_E = 0$.

---

4. (Summen) [1 P]

Berechnen Sie folgende Summen:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i$ (b) $\displaystyle\sum_{q=1}^{4} 2^q$

(c) $\displaystyle\sum_{q=3}^{5} (q-2)^2$ (d) $\displaystyle\sum_{m=1}^{5} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{m}$

Lösung:

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10$

(b) $\displaystyle\sum_{q=1}^{4} 2^q = 2+2^2+2^3+2^4 = 2+4+8+16 = 30$

(c) $\displaystyle\sum_{q=3}^{5} (q-2)^2 = \sum_{n=1}^{3} n^2 = 14$ wobei $n = q-2$ gesetzt wurde.

(d) $\displaystyle\sum_{m=1}^{5} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{m} = -\frac{x^3}{1} + \frac{x^5}{2} - \frac{x^7}{3} + \frac{x^9}{4} - \frac{x^{11}}{5}$

---

5. (Taylor-Entwicklung) [1 P]

Entwickeln Sie folgende Funktionen bis zur 3. Ordnung am angegebenen Punkt x_0.

(a) $f(x) = \ln(x),\ x_0 = 1$ (b) $f(x) = \sin(x),\ x_0 = 0$ (c) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0$

(d) Berechnen Sie die erste Ableitung der Taylor-Entwicklung aus c). Was stellen Sie fest?

Lösung:

(a) $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, allgemein $f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{x^n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \ln(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{1^n n!}(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \ldots$

(b) $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$, $f'''(x) = -\cos(x)$, allgemein $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi/2)$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sin(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{6} + \ldots$

(c) $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$, $f'''(x) = e^x$, allgemein $f^{(n)}(x) = e^x$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = e^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^0}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$

(d) $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n$. Die Ableitung der Taylor-Entwicklung ist gleich der Taylor-Entwicklung.

---

6. (de l'Hospital) [2 P]

Berechnen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$ (c) $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}, \quad n \in \mathbb{N}$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{1-x}$ (e) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)+x^2}{\ln(1-x^2)+e^x}$ *(f) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x+a)} - x\right)$

*(g) $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^n, \quad n \in \mathbb{N}$ *(h) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ *(i) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Hinweis: Umwandlung in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ Formen. *(f-i): Aufgaben für Fortgeschrittene.

Lösung:

(a) Typ: $\frac{0}{0}$, Lösung: -1, $\lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{1} = -1$.

(b) Typ: $\frac{0}{0}$, Lösung: -1, $\lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-1} = -1$.

(c) Typ: $\infty \cdot 0$, Lösung: 0, $f \cdot g \to \frac{g}{1/f}$, $\lim_{x\to\infty} x^n/e^x = \lim_{x\to\infty} nx^{n-1}/e^x = \lim_{x\to\infty} n!/e^x = 0$.

(d) Typ: $\frac{0}{0}$, Lösung: 1, $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{-1/(2-x)}{-1} = 1$.

(e) Typ: $\frac{\infty}{\infty}$, Lösung: 1, $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)+x^2}{\ln(1-x)+\ln(1+x)+e^x} = \lim_{x\to 1} \frac{1+x^2/\ln(1-x)}{1+(\ln(1+x)+e^x)/\ln(1-x)} = 1$.

(f) Typ: $\infty - \infty$, Lösung: $\frac{a}{2}$, $f - g \to \frac{1/g - 1/f}{1/(gf)}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1-(1+a/x)^{-1/2}}{(x\sqrt{1+a/x})^{-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{a(1+a/x)^{-3/2}}{\frac{2}{1+a/x}\left(\sqrt{1+a/x} - \frac{a}{2x\sqrt{1+a/x}}\right)} = \frac{a}{2}$.

(g) Typ: $0 \cdot \infty$, Lösung: 0, $f \cdot g \to \frac{f}{1/g}$, $\lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)^n}{1/x} = \lim_{x\to 0} \frac{n!(\ln x)}{(-1)^{n+1}/x} = \lim_{x\to 0} \frac{n!(1/x)}{(-1)^{n+2}1/x^2} = 0$.

(h) Typ: $\infty - \infty$, Lösung: $\frac{1}{2}$, $f - g \to \frac{1/g - 1/f}{1/(gf)}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$.

(i) Typ: ∞^0, Lösung: 1, $f^g \to \exp(g \ln f)$, $\lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = \exp \lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}\ln x) = e^0 = 1$.
