LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Department Biologie II
Telefon: 089-2180-74800
Grosshadernerstr. 2
Fax: 089-2180-74803
82152 Planegg-Martinsried

3. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 1.11.2017

Abgabe am 7.11.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 9. und 10. November besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Nichtlineare Iterierte Abbildungen - Stabilität einer Fixpunkt-Lösung) [1 P]
Die nichtlineare Iterierte Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ habe eine Fixpunkt-Lösung $(x^*, x^*, x^*, ...)_{t\in\mathbb{N}}$ mit $x^* = f(x^*)$. Um deren Stabiltät zu untersuchen, betrachten wir kleine Störungen $y_t = x_t - x^*$.

(a) Durch welche (nichtlineare) Iterierte Abbildung wird die Zeitentwicklung von y_t beschrieben? Um diese Frage zu beantworten, setzen Sie die Iterierte Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ in die Gleichung $y_{t+1} = x_{t+1} - x^*$ ein und ersetzen Sie anschließend x_t durch $x_t = x^* + y_t$.

(b) Entwickeln Sie nun $f(x^* + y_t)$ für kleine Störungen y_t in eine Taylorreihe bis einschließlich des linearen Terms. Welche (lineare) Iterierte Abbildung erhalten Sie für y_t?

(c) Unter welchen Bedingungen an $f'(x^*)$ ist die Fixpunkt-Lösung asymptotisch stabil, wann instabil und wann marginal stabil?

(d) Wenden Sie Ihr Ergebnis auf die nichtlineare Iterierte Abbildung $x_{t+1} = a \cdot x_t \cdot (1 - x_t)$ an. Betrachten Sie den "trivialen" Fixpunkt $x^* = 0$ und (für $a > 0$) die von Null verschiedene Lösung.

Lösung:

(a) $y_{t+1} = x_{t+1} - x^* \quad \Rightarrow \quad y_{t+1} = f(x_t) - x^* \quad \Rightarrow \quad y_{t+1} = f(x^* + y_t) - x^*$

(b) $f(x^* + y_t) \approx f(x^*) + f'(x^*)y_t$ für $|y_t| \ll 1$.
$y_{t+1} = f(x^* + y_t) - x^* \quad \Rightarrow \quad y_{t+1} \approx f'(x^*)y_t + f(x^*) - x^* = f'(x^*)y_t$
mit der zeitabhängigen Lösung $y_t = c\,[f'(x^*)]^t, \quad c = y_0 = x_0 - x^*$.

(c) Asymptotisch stabil: Für $-1 < f'(x^*) < 1$.
Marginal stabil: Für $f'(x^*) = 1$.
Instabil: Sonst.

(d) Fixpunkt $x^* = 0$:
$f'(x^*) = a \cdot (1 - 2x^*)$ wird mit $x^* = 0$ zu $f'(x^*) = a$. Asymptotisch stabil für $-1 < a < 1$.
Für $|y_t| \ll 1$ gilt $y_{t+1} \approx f'(x^*)y_t = ay_t$.

Fixpunkt $x^* = 1 - \frac{1}{a}$:
$f'(x^*) = a \cdot (1 - 2x^*)$ wird zu $f'(x^*) = 2 - a$. Asymptotisch stabil für $1 < a < 3$.
Für $|y_t| \ll 1$ gilt $y_{t+1} \approx f'(x^*)y_t = (2 - a)y_t$.

---

2. (Ableitungsregeln) [1 P]
Berechnen Sie unter Verwendung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y)\right)^{-1}$ (wobei $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ und

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) \neq 0)$ die erste Ableitung der Funktionen

$$\text{(a)} \quad f(x) = \ln x \qquad\qquad \text{(b)} \quad f(x) = \ln(1+\sqrt{x})$$

Lösung:

(a) $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, bijektiv, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = e^y \Rightarrow f'(x) = 1/x$

(b) $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, bijektiv, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = 2\,(e^y - 1)\,e^y \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2(x+\sqrt{x})}$

---

3. (Taylor-Entwicklung) [1 P]

Entwickeln Sie die folgende Funktion bis zur 2. und 3. Ordnung am angegebenen Punkt x_0. Skizzieren Sie für Beispiel (a) die Funktion $f(x)$ und beide Taylorreihen.

$$\text{(a)} \quad f(x) = 2\,x\,(x+1)^2,\ x_0 = 0 \qquad\qquad \text{(b)} \quad f(x) = 2\,x\,(x+1)^2,\ x_0 = 1$$

Lösung:

(a) und

(b) $f(x) = 2\,x\,(x+1)^2 = 2x(x^2+2x+1) = 2x^3+4x^2+2x$

$f'(x) = 6x^2+8x+2,\ f''(x) = 12x+8,\ f'''(x) = 12$

Allgemeine Taylorreihe für (a) und (b):

2. Ordnung: $y(x) = 2(x_0+2x_0^2+x_0^3) + (2+8x_0+6x_0^2)(x-x_0) + (4+6x_0)(x-x_0)^2$

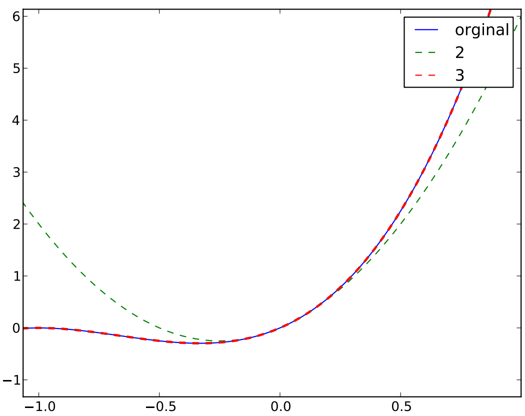
$x_0 = 0 \Rightarrow y(x) = 2x+4x^2$

$x_0 = 1 \Rightarrow y(x) = 2(1+2+1)+(2+8+6)(x-1)+(4+6)(x-1)^2 = 8+16(x-1)+10(x-1)^2 = 10x^2-4x+2$

3. Ordnung: $y(x) = 2(x_0+2x_0^2+x_0^3) + (2+8x_0+6x_0^2)(x-x_0) + (4+6x_0)(x-x_0)^2 + 2(x-x_0)^3$

$x_0 = 0 \Rightarrow y(x) = 2x+4x^2+2x^3 = f(x)$

$x_0 = 1 \Rightarrow y(x) = 8+16(x-1)+10(x-1)^2+2(x-1)^3 = 2x+4x^2+2x^3 = f(x)$



---

4. (Potenzreihen) [1 P]
Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{kx} = ke^{kx}$ gilt, indem Sie die Potenzreihe für e^{kx} ableiten.

Lösung:

$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, daher $e^{kx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!}$ und
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{kx} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{(kx)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nk(kx)^{n-1}}{n!} = k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(kx)^{n-1}}{(n-1)!} = k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} = ke^{kx}$

---

5. (Kurvendiskussion) [2 P]
Diskutieren Sie die Funktionen

$$g(x) = \frac{x^2}{x-1} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \sin(x)\cos(x)$$

nach folgendem Schema:

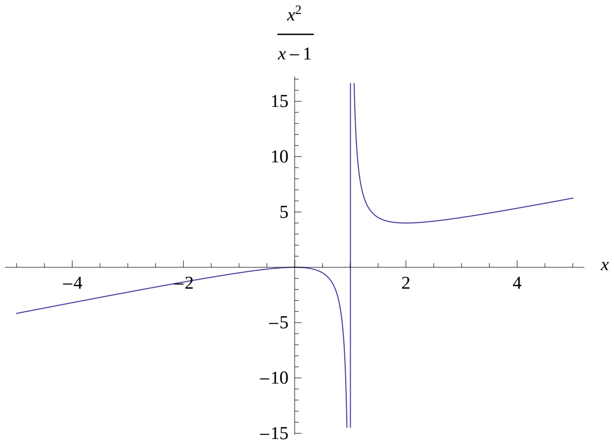
(a) Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion?
(b) Welche Nullstellen hat die Funktion?
(c) Wie ist das asymptotische Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$?
(d) Ist die Funktion stetig? Wie verhält sich die Funktion an den Polstellen (falls sie welche besitzt)?
(e) Bestimmen sie für $g(x)$ und $h(x)$ die ersten drei Ableitungen.
(f) Hat die Funktion lokale Extrema? Wo liegen sie?
(g) Hat die Funktion absolute Extrema? Wo liegen sie?
(h) Für welche x ist die Funktion monoton steigend bzw. monoton fallend?
(i) Wie ist das Krümmungsverhalten? In welchen Bereichen ist die Funktion konvex, in welchen ist sie konkav? Wo sind Wendepunkte?
(j) Skizzieren Sie die Funktion (ohne weitere Funktionswerte zu berechnen!).

Lösung:

$$g(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

(a) weder gerade noch ungerade
(b) $x_0 = 0$
(c) $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(1-1/x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-1/x} = \frac{\lim_{x\to\pm\infty} x}{1-\lim_{x\to\pm\infty} 1/x} = \pm\infty$
(d) Polstelle bei $x = 1$, $\lim_{x\to 1^+} g(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 1^-} g(x) = -\infty$
(e) $g'(x) = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$; $g''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}$; $g'''(x) = -\frac{6}{(x-1)^4}$
(f) $g'(x) = 0 \Rightarrow x_{E_0} = 0, x_{E_1} = 2$; $g''(x_{E_0}) = -2 \Rightarrow$ Maximum bei $(0,0)$; $g''(x_{E_1}) = 2 \Rightarrow$ Minimum bei $(2,4)$
(g) beide Extrempunkte sind nur lokal, da die Funktionswerte gegen $\pm\infty$ sowohl für $\lim_{x\to\pm\infty}$ als auch um die Polstelle bei $x = 1$ gehen
(h) monoton fallend: $0 \leq x < 1 \vee 1 < x \leq 2$
monoton steigend: $x \leq 0 \vee x \geq 2$
(i) keine Wendepunkte mit Hilfe der 2. Ableitung nachweisbar, dennoch wechselt die Krümmung an der Polstelle $x = 1$: $x < 1 \Rightarrow g''(x) < 0 \Rightarrow$ konkav; $x > 1 \Rightarrow g''(x) > 0 \Rightarrow$ konvex
ACHTUNG: Die Begriffe *konkav* und *konvex* werden in verschiedenen Mathematikbüchern unterschiedlich definiert. Die obige Verwendung hält sich an die Definition im Skript.

(j)



$$h(x) = \sin(x)\cos(x)$$

Hinweis: Die Umformung $\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)/2$ (siehe Aufgabe 3a) vereinfacht die Kurvendiskussion.

(a) Symmetrie: $\sin(-x)\cos(-x) = -\sin(x)\cos(x) \Rightarrow -f(x) = f(-x) \Rightarrow f(x)$ ist ungerade

(b) Nullstellen: $f(x) = 0$ wenn $\sin(x) = 0 \Rightarrow x_1 = n\,\pi, n \in \mathbf{Z}$ und $\cos(x) = 0 \Rightarrow x_2 = \pi/2 + n\,\pi, n \in \mathbf{Z}$ zusammen ergibt dies $x_0 = \pi/2\,n, n \in \mathbf{Z}$

(c) Produkt periodischer Funktionen $\Rightarrow$ Grenzwerte existieren nicht

(d) Produkt stetiger Funktionen $\Rightarrow$ stetig

(e) $h'(x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$; $h''(x) = -4\cos(x)\sin(x) = -4\,h(x)$; $h'''(x) = -4\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right) = -4\,h'(x)$

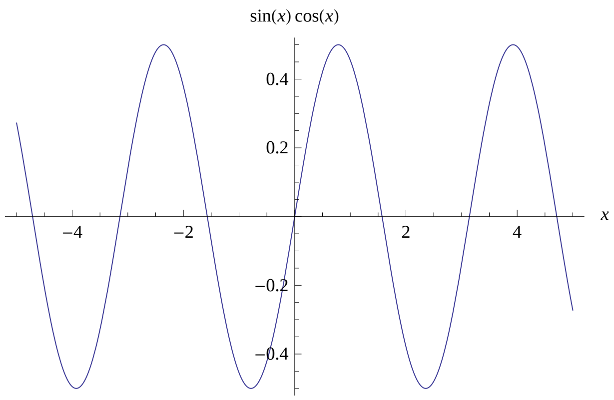
(f) $h'(x) \overset{!}{=} 0$
$\cos^2(x) - \sin^2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(x) - \left[1 - \sin^2(x)\right] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2(x) = 1/2$
$\Leftrightarrow \quad \pm\sin(x) = \sqrt{(1/2)} \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\pm x) = \sqrt{(1/2)} \quad \Leftrightarrow \quad \pm x = \arcsin(\sqrt{(1/2)})$
$\Rightarrow$ Extrema bei $x_E = \pi/4 + \pi/2\,n, n \in \mathbf{Z}$ Einsetzen in $h''(x_E) = -4\cos(x_E)\sin(x_E) = -4f(x_E) \Rightarrow$ hat Extrema an den selben Stellen nur mit umgekehrtem Vorzeichen $\Rightarrow$ für $n = 0$ Maximum, n ungerade Minimum; n gerade Maximum.

(g) die lokalen Extrema sind auch absolute Extrema, da die Funktion periodisch ist und gegen keine Grenzwerte konvergiert

(h) $h(x)$ ist auf den Intervallen $(\pi/4 + \pi/2\,n_1, \pi/4 + \pi/2\,n_2)$ mit $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ und n_1 ungerade und n_2 gerade bzw. 0, streng monton steigend und auf $(\pi/4 + \pi/2\,n_1, \pi/4 + \pi/2\,n_2)$ mit $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ und n_1 gerade bzw. 0 und n_2 ungerade, streng monoton fallend

(i) $h''(x) \overset{!}{=} 0$, da $h''(x) = -4\,h(x)$ erfüllt an den Nullstellen x_0 von $h(x)$, hier hat h' Extrema genauso wie $h'''(x)$ nur mit jeweils umgekehrtem Vorzeichen
konkav auf den Intervallen $(\pi/2\,n_1, \pi/2\,n_2)$ mit $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ und n_1 gerade und $n_2 = n_1 + 1$,
konvex auf den Intervallen $(\pi/2\,n_1, \pi/2\,n_2)$ mit $n_1, n_2 \in \mathbf{Z}$ und n_1 ungerade und $n_2 = n_1 + 1$.

(j)



6. (Umgekehrte Kurvendiskussion) [2 P]

Ein Polynom dritten Grades in der Variablen x ist z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Ein Polynom höheren Grades wird nach demselben Schema definiert.

(a) Bestimmen Sie ein Polynom $f(x)$ dritten Grades (wie oben) so, daß gilt: An der Stelle $x = 1$ hat die Tangente die Steigung 4, eine relative Extremstelle ist $x = 5$, eine Wendestelle ist $x = 10/3$, eine Nullstelle ist 0.

(b) Bestimmen Sie ein Polynom dritten Grades so, daß gilt: Der Punkt $(0, -2)$ liegt auf dem Graphen. Die Normale zur Wendetangente hat die Gleichung $3y - x + 2 = 0$ und schneidet den Graph im Wendepunkt $(2, f(2))$.

(c) Bestimmen Sie ein Polynom *fünften* Grades, dessen Graph zum Ursprung punktsymmetrisch ist, durch den Punkt $(1, -2)$ verläuft und am Punkt $(\sqrt{2}, -\sqrt{8})$ ein relatives Extremum hat.

Hinweis: Bitte beachten Sie, wenn Sie $f(x)$ bestimmt haben, daß Sie noch die *hinreichenden* Kriterien für Extrema und Wendepunkte prüfen! Zur Erinnerung: die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist $f''(x) = 0$.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= a + bx + cx^2 + dx^3 \\ f'(x) &= b + 2cx + 3dx^2 \\ f''(x) &= 2c + 6dx \\ f'''(x) &= 6d \end{aligned}$$

Nullstelle bei $x = 0 :\Rightarrow f(0) = a + b \cdot 0 + c \cdot 0^2 + d \cdot 0^3 = a = 0$.

$$\begin{aligned} &\text{Steigung bei } x = 1\text{:} f'(1) = 4 &\Rightarrow&& b + 2c \cdot 1 + 3d \cdot 1^2 = 4 &\quad (1) \\ &\text{Extremstelle bei } x = 5\text{:} f'(5) = 0 &\Rightarrow&& b + 2c \cdot 5 + 3d \cdot 5^2 = 0 &\quad (2) \\ &\text{Wendepunkt bei } x = 10/3\text{:} f''(10/3) = 0 &\Rightarrow&& 2c + 6d \cdot 10/3 = 0 \Rightarrow c = -10d & \end{aligned}$$

Wenn wir die letzte Gleichung in die für die Extremstelle (Gl. 2) einsetzen, dann bekommen wir

$$b - 4d \cdot 5^2 + \quad 3d \cdot 5^2 = 0.$$

Oder $b = 25d$. In der Gleichung (1) für die Steigung ist dann

$$\begin{aligned} b + 2c + 3d = 25d + 2(-10d) + 3d = 4 \\ \Rightarrow 8d = 4 \\ \Rightarrow b = 25/2, c = -5, d = 1/2. \end{aligned}$$

Also ist

$$f(x) = 25/2x - 5x^2 + 1/2x^3.$$

Überprüfen wir nun:

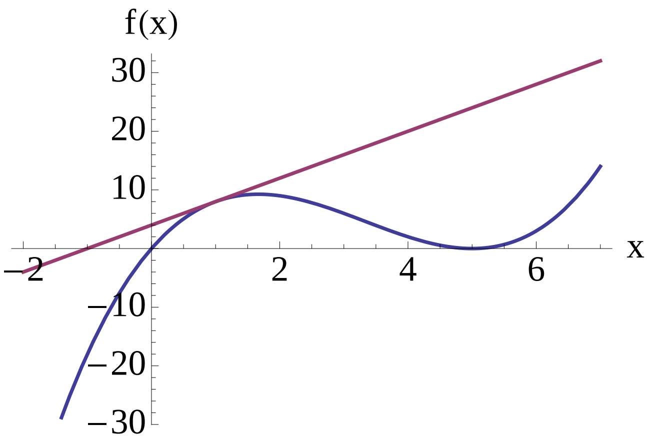
- $x = 5$ ist Extremstelle:

$$f''(x)|_{x=5} = (2c + 6dx)_{x=5} = \left(2(-5) + 6\frac{1}{2}x\right)_{x=5} = -10 + 15 = 5 > 0$$

  Also ein Minimum (Extremstelle mit $f''(x) \neq 0$).

- Wendestelle bei $x = 10/3$:

$$f'''(x)|_{x=10/3} = 6d = 3 \neq 0$$



(b) Der Punkt $(0,-2)$ liegt auf dem Graph $\Rightarrow f(0)=a=-2$.
Wendepunkt bei $x=2$:

$$f''(2)=(2c+6dx)_{x=2}=2c+12d=0$$
$$\Rightarrow c=-6d$$

Schnittpunkt der Normalen mit der Wendetangente (und dem Graph)

$$\begin{aligned}(3y-x+2)_{x=2}=&0\\ 3y-2+2=&0\\ y=&0\end{aligned}$$

Also ist $y(2)=(a+bx+cx^2+dx^3)|_{x=2}=a+2b+4c+8d$.
Die Normale zur Wendetangente hat die Gleichung

$$\begin{aligned}3y=&x-2\\ y=&\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\end{aligned}$$

Wenn die Normale die Steigung $1/3$ hat, dann hat die Tangente Steigung -3.
Hieraus folgt

$$y'(2)=\left(b+2cx+3dx^2\right)|_{x=2}=b+2c\cdot 2+3d\cdot 4=-3$$

und über $y(2)$ wissen wir

$$y(2)=a+2b+4c+8d=0$$

$$\begin{aligned}b+4c+12d=&-3\Rightarrow b+4\cdot(-6d)+12d=-3\\ a+2b+4c+8d=&0\Rightarrow -2+2b-4\cdot 6d+8d=0\end{aligned}$$

Wir haben das Gleichungssystem auf folgende zwei Gleichungen reduziert:

$$b-12d=-3 \qquad \text{(I)}$$
$$2b-16d=2 \qquad \text{(II)}$$

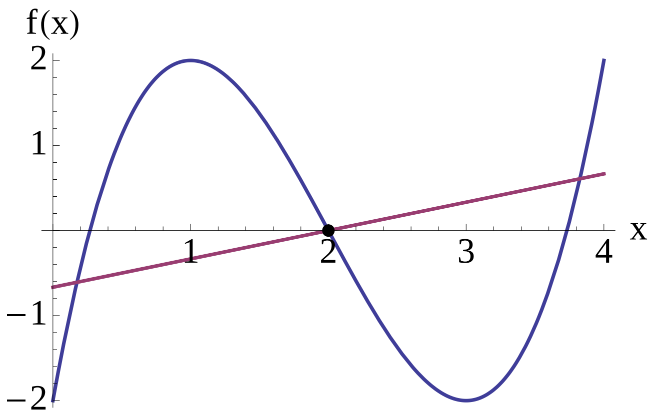
2* Gleichung (I)- (II): $-8d=-8\Rightarrow d=1$. Wenn wir den Wert für d in (I) einsetzen, bekommen wir $b-12=-3\Rightarrow b=9$. Da $c=-6d\Rightarrow c=-6$. Also ist

$$y(x)=-2+9x-6x^2+x^3$$

Zur Überprüfung:

$$y'''(x)=6\neq 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Also ist der Punkt $(2,0)$ ein Wendepunkt.



(c) Ein Polynom fünften Grades wäre $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + gx^5$. Da $f(x) = -f(-x)$ aufgrund der Punktsymmetrie, muss

$$\begin{aligned} f(x) =& bx + dx^3 + gx^5 \\ f'(x) =& b + 3dx^2 + 5gx^4 \\ f''(x) =& 6dx + 20gx^3 \end{aligned}$$

sein. (Die Terme x^2, x^4 und die Konstante a sind nicht punktsymmetrisch.)
Wir wissen

$$\begin{aligned} f(1) =& \left(bx + dx^3 + gx^5\right)\big|_{x=1} = b + d + g = -2 && \text{(I)} \\ f(\sqrt{2}) =& \sqrt{2}\,(b + 2d + 4g) = -2\sqrt{2} && \text{(II)} \\ f'(\sqrt{2}) =& b + 6d + 20g = 0 && \text{(III)} \end{aligned}$$

Gleichung (I) - $1/\sqrt{2}$ (II) und (I)-(III):

$$\begin{aligned} -d - 3g =& 0 && \text{(I}'\text{)} \\ -5d - 19g =& -2 && \text{(II}'\text{)} \end{aligned}$$

$-5\cdot$ (I') + II': $= 4g = -2 \Rightarrow g = 1/2$. In (I'): $-3 \cdot (1/2) - d = 0 \Rightarrow d = -3/2$. Wenn wir die Werte für g und d in (I) einsetzen: $b + d + g = b + 1/2 - 3/2 = -2 \Rightarrow b = -1$. Also

$$f(x) = -x - \frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^5.$$

Test:

$$\begin{aligned} f''(x) =& 6\frac{3}{2}x + 20\frac{1}{2}x^3 \\ f''(\sqrt{2}) =& 9\sqrt{2} + 20\sqrt{2} > 0 \end{aligned}$$

Es liegt ein Minimum (Tiefpunkt) vor.