LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Department Biologie II Telefon: 089-2180-74800
Grosshadernerstr. 2 Fax: 089-2180-74803
82152 Planegg-Martinsried

4. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 8.11.2017

Abgabe am 14.11.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 16. und 17. November besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Umkehrfunktionen) [1 P]
Wie lauten die Umkehrfunktionen folgender Funktionen? Schränken Sie ggf. den Definitionsbereich ein, um die Funktion bijektiv zu machen. Geben Sie jeweils den Definitionsbereich und den Wertebereich an.

(a) $f(x) = 2x - 4$ (c) $z(t) = \sin(t - \pi/2)$

(b) $g(x) = x^2 + 1$ (d) $r(\varphi) = 1/(2\varphi)$

Lösung:

(a) $f : X \to Y, x \mapsto y = f(x) = 2x - 4,\ X = D_f = \mathbb{R};\ \ Y = W_f = \mathbb{R}$,
$f^{-1} : Y \to X, y \mapsto x = f^{-1}(y) = \frac{y+4}{2}$.

(b) $g : X \to Y, x \mapsto y = g(x) = x^2 + 1,\ X = D_g = \mathbb{R};\ \ Y = W_g = [1, \infty)$.
Um die Funktion umkehren zu können, muss deren Definitionsbereich eingeschränkt werden. Man kann eine Funktion
$g_1 : X_1 \to Y, x \mapsto y = g_1(x) = x^2 + 1,\ X_1 = D_{g_1} = \mathbb{R}_0^+;\ \ Y = W_g = [1, \infty)$ und eine Funktion
$g_2 : X_2 \to Y, x \mapsto y = g_2(x) = x^2 + 1,\ X_2 = D_{g_2} = \mathbb{R}_0^-;\ \ Y = W_g = [1, \infty)$ definieren.
Dann gilt
$g_1^{-1} : Y \to X_1, y \mapsto x = g_1^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$ und
$g_2^{-1} : Y \to X_2, y \mapsto x = g_2^{-1}(y) = -\sqrt{y-1}$.

(c) $z : X \to Y, t \mapsto y = z(t) = \sin(t - \pi/2),\ X = D_z = \mathbb{R};\ \ Y = W_z = [-1, 1]$.
Um die Funktion umkehren zu können, muss deren Definitionsbereich auf $D_{z_k} = [k\pi, \pi + k\pi]$ für beliebiges $k \in \mathbb{Z}$ eingeschränkt werden, sodass
$z_k : X_k \to Y, t \mapsto y = z_k(t) = \sin(t - \pi/2),\ X_k = D_{z_k}; Y = W_z = [-1, 1]$.
Die jeweilige Umkehrfunktion ist gegeben durch
$z_k^{-1} : Y \to X_k, y \mapsto t = z_k^{-1}(y) = \arcsin(y) + \pi/2 + k\pi$.

(d) $r : X \to Y, \varphi \mapsto y = r(\varphi) = 1/(2\varphi),\ X = D_r = \mathbb{R}\backslash\{0\};\ \ Y = W_r = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
Die Umkehrfunktionen lautet
$r^{-1} : Y \to X, y \mapsto \varphi = r^{-1}(y) = 1/(2y)$.

---

2. (Komposition von Funktionen) [1 P]
Konstruieren Sie schrittweise Kompositionen von Funktionen. Wie lautet die resultierende Funktion? Schreiben Sie ihre mathematische Gleichung und skizzieren Sie die Funktion.

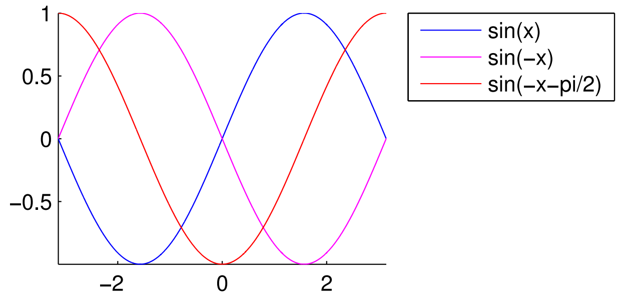
(a) Beginnen Sie mit $\sin(x)$.

1. Spiegeln Sie die Funktion an der y-Achse und
2. Verschieben Sie die Funktion anschließend um $\pi/2$ nach links.

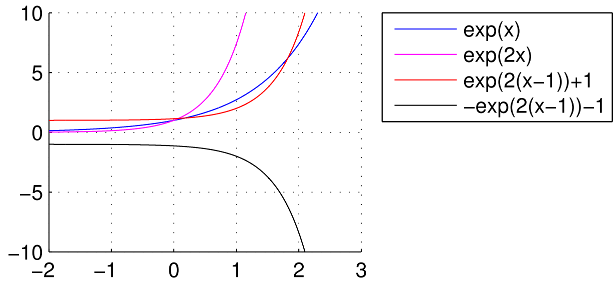
(b) Beginnen Sie mit e^x.

1. Stauchen Sie die Funktion um den Faktor 2 in x-Richtung,
2. Verschieben Sie die Funktion um 1 nach rechts und um 1 nach oben und
3. Spiegeln Sie die Funktion an der x-Achse.

Lösung:



(a)

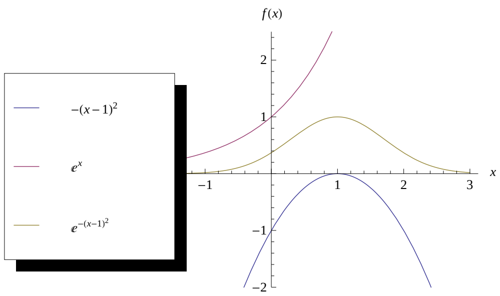


(b)

---

3. (Komposition von Funktionen, Umkehrfunktionen) [1 P]
Skizzieren Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-(x-1)^2}$ und wie sie sich aus den einzelnen Komponenten zusammensetzt. Welchen Definitionsbereich, welche Ziel- und Wertemenge hat die Funktion? Ist sie injektiv und/oder surjektiv? Geben Sie einfache Beispiele für Bereiche an, auf denen sich $f(x)$ umkehren läßt! Wie lautet dort jeweils die Umkehrfunktion?

Lösung: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^{-(x-1)^2}$



- Definitionsbereich $X = \mathbb{R}$, Zielmenge $Y = \mathbb{R}$, Wertebereich $W = (0, 1]$
- $f(x)$ ist weder injektiv noch surjektiv
- Auf $D = [1, \infty)$ bzw. $D = (-\infty, 1]$, ist $f(x) = e^{-(x-1)^2}$ umkehrbar $\Rightarrow f^{-1}(y) = \pm\sqrt{-\ln y} + 1$

---

4. (Additionstheoreme) [1 P]
Formen Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe der Additionstheoreme so um, dass sie in der Form $a\sin(b)$ oder $a\cos(b)$ geschrieben werden können.

(a) $4\cos(t)\sin(t)$ (b) $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (c) $3\cos^2 z - 3\sin^2 z$

Hinweis: Bringen Sie die Terme in (a) und (c) zuerst in die Form $\sin x \cos y \pm \cos x \sin y$ oder $\cos x \cos y \pm \sin x \sin y$, um die Additionstheoreme in umgekehrter Richtung anwenden zu können.

Lösung:

(a) $4\cos(t)\sin(t) = 2(\cos(t)\sin(t) + \cos(t)\sin(t)) = 2\sin(t + t) = 2\sin(2t)$

(b) $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(x)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \quad = \cos(x)\cdot 0 - \sin(x)\cdot(-1) \quad = \sin(x)$

(c) $3\cos^2 z - 3\sin^2 z = 3(\cos z\cos z - \sin z \sin z) = 3\cos(2z)$

---

5. (Trigonometrische Umkehrfunktionen) [1 P]

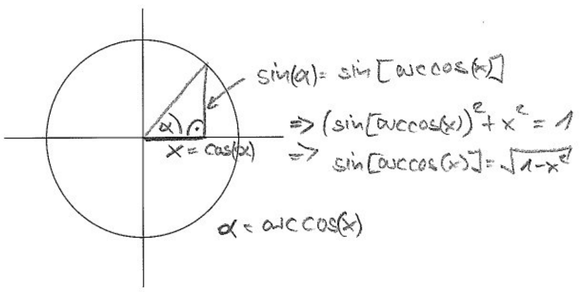
Drücken Sie die folgenden Terme ohne trigonometrische Funktionen (sin, cos, tan, etc.) aus. Überlegen Sie anhand einer graphischen Identifizierung am Einheitskreis. Geben Sie jeweils den maximalen Definitions- und Wertebereich an:

(a) $\sin[\arccos(x)]$ (b) $\cos[\arctan(x)]$

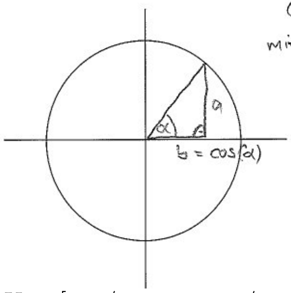
(c) $\tan[\arcsin(x)]$ (d) $\arccos[\sin(x)]$

Lösung:

(a) $\sin[\arccos(x)] = \sqrt{1-x^2}$
$X = [-1,1], Y = [0,1]$



(b) $\cos[\arctan(x)] = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$X = \mathbb{R}, Y =]0,1]$



cos(arctan(x)) = cos(α) = b
mit $x = \frac{a}{b}$ & $a^2 + b^2 = 1$
Zusammenfassen u. nach b auflösen:
$x = \frac{\sqrt{1-b^2}}{b} \Rightarrow x^2 b^2 = 1 - b^2$
$\Rightarrow (1+x^2)b^2 = 1$
$\Rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(c) $\tan[\arcsin(x)] = \dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)}}$
$X = (-1,1),\ Y = (-\infty,\infty)$

(d) $X = [-\pi/2 + 2m\pi, \pi/2 + 2m\pi]$,
$Y = [2n\pi, \pi + 2n\pi]$:
$\arccos[\sin(x)] = \pi/2 - x + 2(n+m)\pi$
$X = [\pi/2 + 2m\pi, 3\pi/2 + 2m\pi]$,
$Y = [2n\pi, \pi + 2n\pi]$:
$\arccos[\sin(x)] = x - \pi/2 + 2(n-m)\pi$,
mit $n, m \in \mathbb{Z}$

---

6. (Ableitungsregeln) [1 P]

Berechnen Sie unter Verwendung der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \arccos(x)$ (b) $f(x) = \text{arccot}(x)$

Lösung:

(a) $f: X \to Y, x \mapsto y = f(x) = \arccos(x),\ X = D_f = [-1,1];\ \ Y = W_f = [0 + k\pi, \pi + k\pi]$ für fixes $k \in \mathbb{Z}$.
f ist bijektiv und die Umkehrfunktion existiert. (Anmerkung: Genau genommen gilt die Konvention, dass der Wertebereich des $\arccos$ als $W_f = [0,\pi]$ definiert ist. Einfachheitshalber bezeichnen wir hier Umkehrfunktionen mit anderen Wertebereichen ($k \neq 0$) ebenfalls mit $\arccos$.) Sie lautet
$f^{-1}: Y \to X, y \mapsto x = f^{-1}(y) = \cos(y)$
mit
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = -\sin(y)$
und
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y)\right)^{-1} = -\frac{1}{\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-(\cos(y))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,
da $(\sin(y))^2 + (\cos(y))^2 = 1$.

(b) $f: X \to Y, x \mapsto y = f(x) = \operatorname{arccot}(x),\ X = D_f = \mathbb{R};\ \ Y = W_f = (0 + k\pi, \pi + k\pi)$ für fixes $k \in \mathbb{Z}$.
f ist bijektiv und die Umkehrfunktion existiert. (Anmerkung: Genau genommen gilt die Konvention, dass der Wertebereich des arccot als $W_f = (0, \pi)$ definiert ist. Einfachheitshalber bezeichnen wir hier Umkehrfunktionen mit anderen Wertebereichen ($k \neq 0$) ebenfalls mit arccot.) Sie lautet
$f^{-1}: Y \to X, y \mapsto x = f^{-1}(y) = \cot(y)$
mit
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y) = -\frac{1}{(\sin(y))^2}$
und
$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f^{-1}(y)\right)^{-1} = -(\sin(y))^2 = -\frac{1}{1+(\cot(y))^2} = -\frac{1}{1+x^2}$,
da $(\cot(y))^2 = \frac{(\cos(y))^2}{(\sin(y))^2} = \frac{1-(\sin(y))^2}{(\sin(y))^2}$ mit $(\sin(y))^2 + (\cos(y))^2 = 1$.

---

7. (Binomischer Satz) [1 P]
Bestimmen Sie den Wert des Ausdrucks $(-1-x)^6$ mit dem Taschenrechner für $x = 1/100$. Schreiben Sie dann den Ausdruck mit Hilfe des binomischen Satzes aus, berechnen Sie die lineare und quadratische Näherung *ohne* Taschenrechner und vergleichen Sie sie mit dem exakten Resultat.

Lösung:

$(-1 - 1/100)^6 = 1.06152$

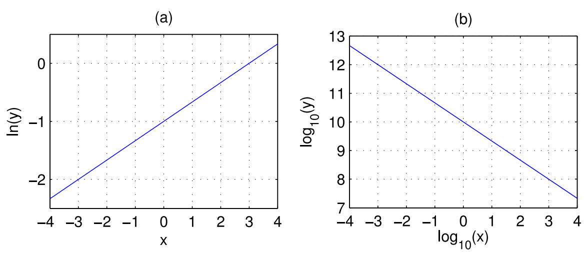
$$(-1-x)^6 = (1+x)^6 = 1 + \binom{6}{1}x + \binom{6}{2}x^2 + \binom{6}{3}x^3 + \binom{6}{4}x^4 + \binom{6}{5}x^5 + x^6$$
$$= 1 + \frac{6!}{5!\cdot 1!}x + \frac{6!}{4!\cdot 2!}x^2 + \frac{6!}{3!\cdot 3!}x^3 + \frac{6!}{2!\cdot 4!}x^4 + \frac{6!}{1!\cdot 5!}x^5 + x^6$$
$$= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$$

Lineare Näherung:
$1 + 6\left(\frac{1}{100}\right) = \frac{106}{100} = 1.06$

Quadratische Näherung:
$1 + 6\left(\frac{1}{100}\right) + 15\left(\frac{1}{100}\right)^2 = \frac{10615}{10000} = 1.0615$

---

8. (Logarithmus) [1 P]
Beschreiben Sie folgende Graphen jeweils durch eine Funktion $y = f(x)$.



Hinweis: Beschreiben Sie hierfür die Graphen zuerst jeweils durch eine lineare Gleichung der Variablen, welche auf beiden Achsen dargestellt sind. Definieren Sie dazu $u = x, v = \ln(y)$ (für Beispiel a) und $u = \log_{10}(x), v = \log_{10}(y)$ (für Beispiel b) und bestimmen Sie dann jeweils die Funktion $v = f(u)$. Formen Sie danach die Funktion $v = f(u)$ jeweils in die zu bestimmende Funktion $y = f(x)$ um.

Lösung:

(a) $\ln(y) = x/3 - 1 \Rightarrow y = \exp(x/3 - 1)$

(b) $\log(y) = -2/3 \log(x) + 10 \Rightarrow$
$y = 10^{-2/3*\log(x)+10} = 10^{10} x^{-2/3}$