LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

PROF. ANDREAS HERZ, DR. STEFAN HÄUSLER
DEPARTMENT BIOLOGIE II
GROSSHADERNERSTR. 2
82152 PLANEGG-MARTINSRIED

EMAIL: HAEUSLER@BIOLOGIE.UNI-MUENCHEN.DE
TELEFON: 089-2180-74800
FAX: 089-2180-74803

5. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 15.11.2017

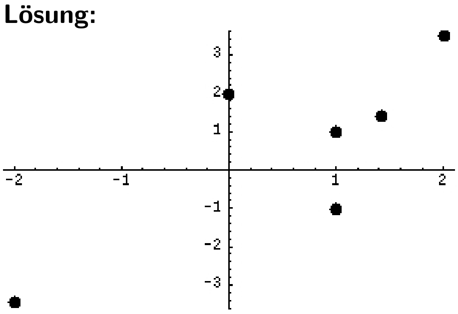
Abgabe am 21.11.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 23. und 24. November besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Komplexe Zahlen: Darstellung) [1 P]
Zeichnen Sie die folgenden Zahlen in der komplexen Ebene und geben Sie jede Zahl in kartesischen Koordinaten und in Polarkoordinaten an.

(a) $(1+\mathrm{i})$ (b) $(1-\mathrm{i})$ (c) $(1+\mathrm{i})^2$
(d) $(\mathrm{i}+\sqrt{3})^2$ (e) $2(\cos(\pi/4)+\mathrm{i}\sin(\pi/4))$ (f) $4(\cos(4\pi/3)+\mathrm{i}\sin(4\pi/3))$
(g) $2\exp(-\mathrm{i}3\pi/2)$

Lösung:



(a)-(g): $\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4}, \sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\pi/4}, 2e^{\mathrm{i}\pi/2}, 4e^{\mathrm{i}\pi/3}, 2e^{\mathrm{i}\pi/4}, 4e^{-\mathrm{i}2\pi/3}, 2e^{\mathrm{i}\pi/2}$
(a)-(g): $1+\mathrm{i}, 1-\mathrm{i}, 2\mathrm{i}, 2+2\mathrm{i}\sqrt{3}, (1+\mathrm{i})\sqrt{2}, -2-2\mathrm{i}\sqrt{3}, 2\mathrm{i}$.

---

2. (Komplexe Zahlen: Darstellung) [1 P]
Welche Figur bilden die Punktmengen ($z \in \mathbb{C}$), für die gilt:

(a) $|z| \leq 3$ (b) $\mathrm{Im}(z) > \mathrm{Re}(z)$ (c) $\mathrm{Im}(z)+\mathrm{Re}(z) = 1$
(d) $0 \leq \arg(z) < \pi/2$ (e) $|z-1+\mathrm{i}| = 4$ (f) $z = -\bar{z}$
(g) $1 < (z-1)(\bar{z}-1) < 2$ (h) $0 < z+\bar{z} < 1$

Lösung:

(a) Abgeschlossene Kreisscheibe, Mittelpunkt (0,0), Radius 3.
(b) $y > x$ ergibt die obere halbe Ebene, über der Grenzgeraden $y = x$.
(c) $y + x = 1$ beschreibt eine Gerade.

(d) Erster Quadrant (inkl. x-Achse, ohne y-Achse).

(e) Kreisrand.

(f) $z = -\bar{z}$ ergibt $x + \mathrm{i}y = -x + \mathrm{i}y$ also $x = -x$, daher $x = 0$, y beliebig: die imaginäre Achse.

(g) $(x - 1 + \mathrm{i}y)(x - 1 - \mathrm{i}y) = (x - 1)^2 + y^2$. Die beiden Grenzkurven sind daher Kreise um den Punkt $(1, 0)$ mit $r = 1$ und $\sqrt{2}$.

(h) Streifen $0 < x < 1/2$.

---

3. (Komplexe Zahlen) [1 P]

Lösen Sie die Gleichungen ($z \in \mathbb{C}$): (Geben Sie das Ergebnis in kartesischen Koordinaten an.)

(a) $z = (2 + \mathrm{i}) + (-1 + \mathrm{i})$	(b) $z = (2 + \mathrm{i}) - (-1 + \mathrm{i})$	(c) $z = \mathrm{i}^2$
(d) $z = -\mathrm{i}(2\mathrm{i} + 1)$	(e) $z = \dfrac{2\mathrm{i} - 3}{1 - 3\mathrm{i}}$	(f) $z = \ln(\mathrm{i})$
(g) $z = (2 + 3\mathrm{i})\bar{z}$	(h) $z = -\mathrm{i}\bar{z}$	(i) $z^2 = \bar{z}^2$

Lösung:

(a) $z = 1 + 2\mathrm{i}$

(b) $z = 3$

(c) $z = -1$

(d) $z = 2 - \mathrm{i}$

(e) $z = \dfrac{2\mathrm{i} - 3}{1 - 3\mathrm{i}} \cdot \dfrac{1 + 3\mathrm{i}}{1 + 3\mathrm{i}} = \dfrac{(-3 + 2\mathrm{i})(1 + 3\mathrm{i})}{1 + 9} = \dfrac{-9 - 7\mathrm{i}}{10} = -\dfrac{9}{10} - \dfrac{7}{10}\mathrm{i}$

(f) $\mathrm{i}(\pi/2 + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$

(g) $z = 0$

(h) $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x = -y$

(i) $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x = 0$ oder $y = 0$

---

4. (Komplexe Zahlen: Wurzeln) [1 P]

Mit Hilfe der Darstellung $z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi}$ können Wurzeln von komplexen Zahlen z einfach berechnet werden.

(a) Ziehen Sie aus $z = 16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi + 2k\pi)},\ \ k \in \mathbb{Z}$ die Wurzel, berechnen Sie also $z^{1/2}$. Welchen Betrag hat $z^{1/2}$? Was erhalten Sie als Argument von $z^{1/2}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$? Wieviele tatsächlich verschiedene Zahlen erhalten Sie also? Zeichnen Sie diese und z in die Gaußsche Zahlenebene ein. Haben Sie gemerkt, daß Sie gerade die Wurzel aus einer negativen Zahl gezogen haben?

(b) Berechnen Sie genauso wie in (a) die dritte Wurzel aus $z = 27\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi/2 + 2k\pi)}$. Wieviele verschiedene Lösungen erhalten Sie diesmal? Skizzieren Sie das Ergebnis und z in der Gaußschen Zahlenebene.

(c) Um die Gleichung $x^2 = 4$ nach x aufzulösen, muß aus 4 die Wurzel gezogen werden. Gehen Sie dabei so vor wie in Teilaufgabe (a) (welchen Betrag und welches Argument hat die reelle Zahl 4 ?). Wieviele Lösungen erhalten Sie? Kommt Ihnen das bekannt vor?

Lösung:

(a) $\sqrt{z} = \left(16\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\pi+2k\pi)}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}(-\pi+2k\pi)} = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2}+k\pi)}$

Welchen Betrag hat $z^{1/2}$? $|z^{1/2}| = 4$
Was erhalten Sie als Argument von $z^{1/2}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$?
$\arg(z_0^{1/2}) = -\frac{\pi}{2}$, $\arg(z_1^{1/2}) = (-\frac{\pi}{2} + \pi)$, $\arg(z_2^{1/2}) = (-\frac{\pi}{2} + 2\pi)$, $\arg(z_3^{1/2}) = (-\frac{\pi}{2} + 3\pi)$, $\arg(z_4^{1/2}) = (-\frac{\pi}{2} + 4\pi)$
Wieviele tatsächlich verschiedene Zahlen erhalten Sie also? 2

(b) $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{3}(-\frac{\pi}{2}+2k\pi)} = 3\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{6}+k\frac{2}{3}\pi)}$
Wieviele verschiedene Lösungen erhalten Sie diesmal? 3

(c) $4 = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(0+2k\pi)} = 4\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sqrt{4} = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$

$= 2\left(\underbrace{\cos(k\pi)}_{\in\{-1,1\}} + \mathrm{i}\underbrace{\sin(k\pi)}_{=0}\right) = \pm 2$

Wieviele Lösungen erhalten Sie? 2

---

5. (Folgen und Reihen)
Diskutieren Sie die nachstehenden Folgen und Reihen nach folgendem Schema:

i) Ist die Folge monoton, nicht monoton oder streng monoton?
ii) Konvergiert oder divergiert die Folge?
iii) Ist die Folge nach oben und/oder nach unten beschränkt?

Folgen: [1 P]

(a) $a_n = (-1)^n$

(b) $a_n = -\dfrac{1}{n^2}$

(c) $a_n = 3 - \dfrac{1}{n}$

(d) $a_n = \dfrac{1 - 10n}{5n}$

Reihen: [1 P]

(e) $r_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{i} \frac{\pi}{2^j}$

(f) $s_m = \displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1/3}}$

Begründen Sie alle Ihre Antworten formal! Es gilt $i, j, m, n \in \mathbb{N}$ und $i, j, m, n \geq 1$.
Hinweis: Vergleichen Sie die Reihen mit im Skript behandelten Reihen (Kapitel 5.4 und 5.5).

Lösung: Folgen

(a) i) Nicht monoton, da $a_1 = -1 < a_2 = 1 > a_3 = -1$.
ii) Divergent. Für Konvergenz gegen eine Zahl a muß für jedes ε ein n_ε existieren, sodass für alle $n \geq n_\varepsilon$ die Ungleichung $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt. $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|a_{n+1} - a| < \varepsilon$ implizieren $|a_n - a_{n+1}| < 2\varepsilon$, weil $|a_n - a_{n+1}| = |a_n - a - a_{n+1} + a| \leq |a_n - a| + |a_{n+1} - a| < 2\varepsilon$. Da aber für alle n gilt $|a_n - a_{n+1}| = 2$, kann die Bedingung für Konvergenz für $\varepsilon < 1$ nicht erfüllt werden.
iii) Beschränkt: $-1 \leq (-1)^n = a_n \leq 1$.

(b) i) Streng monoton wachsend.
ii) Konvergent. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
iii) Beschränkt: $-1 \leq a_n < 0$ für alle $n \geq 1$.
$-1 \leq -1/(n^2) \Leftrightarrow -n^2 \leq -1 \Leftrightarrow 1 \leq n^2 \overset{n\geq 1}{\Leftrightarrow} 1 \leq n$.

$-1/(n^2) < 0 \Leftrightarrow -1 < 0 \Leftrightarrow$ w.A..
$-\frac{1}{(n+1)^2} > -\frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n^2 < (n+1)^2 \overset{n \geq 1}{\Leftrightarrow} n < n+1 \Leftrightarrow 0 < 1 \Leftrightarrow$ w.A..

(c) i) Streng monoton wachsend.
$3 - 1/n < 3 - 1/(n+1) \Leftrightarrow 1/(n+1) < 1/n \Leftrightarrow n < n+1 \Leftrightarrow 0 < 1 \Leftrightarrow$ w.A..
ii) Konvergent. $\lim_{n\to\infty} a_n = 3$
iii) Beschränkt: $2 \leq a_n < 3$ für alle $n \geq 1$.
$2 \leq 3 - 1/n \Leftrightarrow 2 + 1/n \leq 3 \Leftrightarrow 1/n \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq n$.
$3 - 1/n < 3 \Leftrightarrow 0 < 1/n \Leftrightarrow 0 < 1 \Leftrightarrow$ w.A..

(d) i) Streng monoton fallend.
$(1-10n)/(5n) > (1-10(n+1))/(5(n+1)) \Leftrightarrow n+1-10n(n+1) > n-10n(n+1) \Leftrightarrow n+1 > n \Leftrightarrow 1 > 0 \Leftrightarrow$ w.A..
ii) Konvergent. $\lim_{n\to\infty} a_n = -2$
iii) Beschränkt: $-2 < a_n \leq -9/5$ für alle $n \geq 1$.
$-2 < (1-10n)/(5n) \Leftrightarrow (10n-1)/(5n) < 2 \Leftrightarrow 10n - 1 < 10n \Leftrightarrow -1 < 0 \Leftrightarrow$ w.A..
$(1-10n)/(5n) \leq -9/5 \Leftrightarrow 9/5 \leq (10n-1)/(5n) \Leftrightarrow 9n \leq 10n - 1 \Leftrightarrow 1 \leq n$.

Reihen:

(e) i) Streng monoton wachsend, da $r_{i+1} - r_i = \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\pi}{2^j} - \sum_{j=1}^{i} \frac{\pi}{2^j} = \frac{\pi}{2^{i+1}} > 0$.
ii) Konvergiert gegen π.
$\lim_{i\to\infty} r_i = \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{i} \frac{\pi}{2^j} = \pi \cdot \left(-1 + \lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{i} \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)$
Vergleich mit der unendlichen geometrischen Reihe $\lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{i} q^j = \frac{1}{1-q}$ ergibt
$\lim_{i\to\infty} r_i = \pi \cdot (-1 + \frac{1}{1-1/2}) = \pi \cdot (-1+2) = \pi$.
iii) Beschränkt durch $\frac{\pi}{2} \leq r_i < \pi$.
Nach unten beschränkt durch $r_1 = \frac{\pi}{2}$, da streng monoton wachsend.
Nach oben beschränkt durch π, da streng monoton wachsend und Konvergenz gegen π.

(f) i) Streng monoton wachsend, da $s_{m+1} - s_m = \sum_{n=1}^{m+1} \frac{1}{n^{1/3}} - \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^{1/3}} = \frac{1}{(n+1)^{1/3}} > 0$.
ii) Divergent.
Vergleich mit der harmonischen Reihe $v_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$ mit $\lim_{m\to\infty} v_m = \infty$.
Da $s_m > v_m$ für alle m, gilt auch $\lim_{m\to\infty} s_m = \infty$.
iii) Nach unten beschränkt durch $s_1 = 1 \leq s_m$, da streng monoton wachsend.
Nicht nach oben beschränkt, da divergent gegen ∞.

---

6. (Folgen und Reihen) [1 P]
Erfinden Sie Folgen mit den folgenden Eigenschaften und begründen Sie Ihre Antworten.

(a) Divergent und beschränkt.

(b) Konvergent und nicht monoton.

(c) Streng monoton, nach oben beschränkt und nicht nach unten beschränkt.

Erfinden Sie Reihen nach dem selben Schema.

Lösung: Folgen:

(a) $a_n = (-1)^n$. Siehe Aufgabe 5a.

(b) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Kovergent, da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Nicht monoton, da $\mathrm{sign}(a_n) = -\mathrm{sign}(a_{n+1})$.

(c) $a_n = -n$ mit $n \geq 1$. Streng monoton fallend, da $a_{n+1} - a_n = -1$. Nach oben beschränkt, da streng monoton fallend und $a_1 = -1$, sodass $a_n \leq -1$. Nicht nach unten beschränkt, da $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Reihen:

(a) $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} = \frac{1-(-1)^n}{2}$.
Divergent, da $\lim_{k\to\infty}(-1)^{k-1} \neq 0$ keine Nullfolge ist.
Beschränkt, da $s_n \in \{0,1\}$ und daher $0 \leq s_n \leq 1$.

(b) $s_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(-2)^k}$.
Konvergent, da absolut kovergent $\lim_{n\to\infty}|s_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2)^k} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ (geometrische Reihe).
Nicht monoton, da $s_0 > s_1 < s_2 > \ldots$.

(c) $s_n = \sum_{k=1}^{n} -q = -qn$ mit $q > 0$.
Streng monoton fallend, da $s_{n+1} - s_n = -q < 0$.
Nach oben beschränkt, da streng monoton fallend und $s_n \leq s_1 = -q$.
Nicht nach unten beschränkt, da divergent $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$.