LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
Department Biologie II
Grosshadernerstr. 2
82152 Planegg-Martinsried
email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Telefon: 089-2180-74800
Fax: 089-2180-74803

6. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 22.11.2017

Abgabe am 28.11.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 30. November und 1. Dezember besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html

---

1. (Integration) [2 P]
Berechnen Sie folgende elementare Integrale:

(a)	$\int_{-3}^{3} -p^2 \mathrm{d}p$	(b)	$\int_{-1}^{1} (z+2)^2 \mathrm{d}z$	(c)	$\int_{1}^{2} \frac{x^2+1}{2x} \mathrm{d}x$
(d)	$\int_{1}^{2} r^{-1} \mathrm{d}r$	(e)	$\int_{-1}^{0} -7e^{-x} \mathrm{d}x$	(f)	$\int_{0}^{3} 3^y \ln(3) \mathrm{d}y$
(g)	$\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x$	(h)	$\int_{-2}^{2} (y^3-2y)\, \mathrm{d}y$	(i)	$\int_{0}^{2} (3x^2+1)\, \mathrm{d}x$

Lösung:

(a) $\int_{-3}^{3} -p^2 \mathrm{d}p = \left(-\frac{1}{3}p^3\right)\Big|_{p=-3}^{p=3} = -18$

(b) $\int_{-1}^{1} (z+2)^2 \mathrm{d}z = \int_{-1}^{1} z^2 + 4z + 4 \mathrm{d}z = \left(\frac{z^3}{3} + 2z^2 + 4z\right)\Big|_{z=-1}^{z=1} = \frac{2}{3} + 8 = \frac{26}{3}$

(c) $\int_{1}^{2} \frac{x^2+1}{2x} \mathrm{d}x = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}\ln|x|\right)\Big|_{x=1}^{x=2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$

(d) $\int_{1}^{2} r^{-1} \mathrm{d}r = (\ln|x|)\Big|_{r=1}^{r=2} = \ln 2$

(e) $\int_{-1}^{0} -7e^{-x} \mathrm{d}x = \left(7e^{-x}\right)\Big|_{x=-1}^{x=0} = 7 - 7e$

(f) $\int_{0}^{3} 3^y \ln(3) \mathrm{d}y = (3^y)\Big|_{y=0}^{y=3} = 26$

(g) $\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_{-1}^{0} = ... = \frac{\mathrm{e}^2 - 1}{2}$

(h) $\int_{-2}^{2} (y^3-2y)\, \mathrm{d}y = \frac{1}{4}\left[y^4\right]_{-2}^{2} - \left[y^2\right]_{-2}^{2} = 0$

(i) $\int_{0}^{2} (3x^2+1)\, \mathrm{d}x = \left(x^3 + x\right)\Big|_{x=0}^{x=2} = 10$

2. (Integration) [1 P]

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Substitution.

(a) $\int (4+5x)^{-3}\,\mathrm{d}x$ (b) $\int r\sqrt[3]{9-r^2}\,\mathrm{d}r$ (c) $\int \cos^n(\varphi)\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

(d) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ (e) $\int \sin(\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$ (für Fortgeschrittene)

Lösung:

(a) Mit $u = 4+5x$ und $\mathrm{d}u = 5\mathrm{d}x$ erhält man $\int(4+5x)^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\int u^{-3}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{10u^2}+c = -\frac{1}{10(4+5x)^2}+c.$

(b) Mit $u = 9-r^2$ und $\mathrm{d}u = -2r\mathrm{d}r$ erhält man $-\frac{1}{2}\int \sqrt[3]{u}\,\mathrm{d}u = -\frac{3u^{1/3+1}}{2\cdot 4}+c = -\frac{3(9-r^2)^{4/3}}{8}+c.$

(c) Mit $u = \cos(\varphi)$ und $\mathrm{d}u = -\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi$ erhält man $-\int u^n\,\mathrm{d}u = -\frac{u^{n+1}}{n+1}+c = -\frac{(\cos(\varphi))^{n+1}}{n+1}+c.$

(d) Mit $u = f(x)$ und $\mathrm{d}u = f'(x)\mathrm{d}x$ erhält man $\int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u|+c = \ln|f(x)|+c.$

(e) Mit $w = \sqrt{x}$ und $\mathrm{d}w = \frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ erhält man $\int \sin(w)2w\,\mathrm{d}w.$
Partielle Integration mit $u = 2w$ und $\mathrm{d}v = \sin(w)\mathrm{d}w$ ergibt $-2w\cos(w) + 2\int\cos(w)\mathrm{d}w = -2(w\cos(w) - \sin(w)) + c = 2(\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})) + c.$

---

3. (Integration) [2 P]

Berechnen Sie die folgenden Integrale. Hierbei müssen Sie selbst entscheiden, wie Sie vorgehen (z.B. Substitution, partielle Integration oder direkt).

(a) $\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x$ (b) $\int_1^2 6x^2\,\mathrm{d}x$ (c) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,x\,\mathrm{d}x$ (d) $\int_1^2 4x^3\,\mathrm{d}x$

(e) $\int_0^{\pi} x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$ (f) $\int_1^2 6x^2+4x^3\,\mathrm{d}x$ (g) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ (h) $\int_0^1 2x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x$

(i) $\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$ (j) $\int_1^{\infty} \frac{t-1}{(3-2t+t^2)^2}\mathrm{d}t$ (k) $\int_{-3}^{3} r(9-r^2)^{1/3}\mathrm{d}r$ (l) $\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$

Lösung:

(a)

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\cdot 2^3 - \frac{1}{3}\cdot 1^3 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

(b)

$$\int_1^2 6x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{6}{3}x^3\right]_1^2 = 2\cdot 2^3 - 2\cdot 1^3 = 16-2 = 14$$

oder einfacher mit (a)

$$6\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = 6\frac{7}{3} = 14$$

(c) $\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\,x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = \dots = 1$

Substitution: $u = x^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$

(d)

$$\int_1^2 4x^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4}{4}x^4\right]_1^2 = 2^4 - 1^4 = 16-1 = 15$$

(e) $\displaystyle\int_0^\pi x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$
$u = x;\quad v = -\cos x$
$u' = 1;\quad v' = \sin x$
$\displaystyle\int_0^\pi x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x = [-x\,\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)\,\mathrm{d}x = [-x\,\cos(x)]_0^\pi + [\sin(x)]_0^\pi = ... = \pi$

(f)

$$\int_1^2 6x^2 + 4x^3\,\mathrm{d}x = \int_1^2 6x^2\,\mathrm{d}x + \int_1^2 4x^3\,\mathrm{d}x = 14 + 15 = 29$$

(g) Da $\mathrm{e}^{-\infty} = \lim_{a\to\infty}\mathrm{e}^{-a} = 0$, ist

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^\infty = -\mathrm{e}^{-\infty} - \left(-\mathrm{e}^{-0}\right) = 0 + 1 = 1\,,$$

(h) $\displaystyle\int_0^1 2x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[x\cdot\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^2 + \frac{1}{2}$

(i)

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^\infty = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\infty} - \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\cdot 0}\right) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(j) Substitution: $u = 3 - 2t + t^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = (2t-2)\mathrm{d}t$.
$\int_1^\infty \frac{t-1}{(3-2t+t^2)^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_2^\infty \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{2u}|_2^\infty = 1/4.$

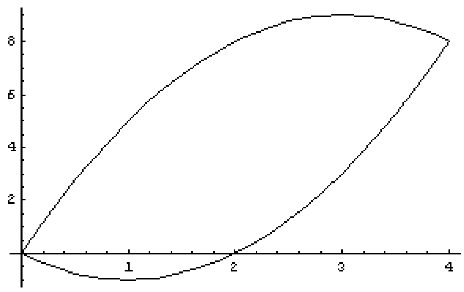
(k) Substitution: $u = 9 - r^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = -2r\mathrm{d}r$.
$\int_{-3}^3 r(9-r^2)^{1/3}\mathrm{d}r = \int_0^3 r(9-r^2)^{1/3}\mathrm{d}r - \int_0^3 r(9-r^2)^{1/3}\mathrm{d}r = 0$

(l) Substitution: $u = a^2 + x^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$.
$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{a^2}^{2a^2} u^{-1/2}\mathrm{d}u = u^{1/2}|_{a^2}^{2a^2} = (\sqrt{2}-1)a.$

---

4. (Integration) [1 P]
Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Parabeln $y = 6x - x^2$ und $y = x^2 - 2x$ begrenzt wird.

Lösung:



Schnittpunkte der Parabeln: $6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow x(2x-8) = 0 \Rightarrow x \in \{0,4\}$. Schnittpunkt der unteren Parabel mit der x-Achse: $y = x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x \in \{0,2\}$. Fläche:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^4 6x - x^2 dx - \int_0^4 x^2 - 2x dx \\ &= (3x^2 - x^3/3)|_0^4 - (x^3/3 - x^2)|_0^4 \\ &= (3\cdot 16 - 64/3) - (64/3 - 16) \\ &= 64/3. \end{aligned}$$

---

5. (Trigonometrische Funktionen, Integration) [1 P]
Berechnen Sie mittels Substitution das unbestimmte Integral $\int (\sin(x))^{-1}\,\mathrm{d}x$.

Hinweis: Wenn der Integrand eines Integrals ein Polynom von trigonometrischen Funktionen ist, dann gibt es die nützliche Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, welche die Integration erleichtert. Die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$ können als Bruch von Polynomen von t geschrieben werden. Drücken Sie zuerst $\sin(x)$ und $\mathrm{d}x$ (durch Anwendung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus) als Funktion von t aus. Lösen Sie danach das gesuchte Integral mittels dieser Substitution.

Lösung:

Mittels $\sin(x) = 2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})$ und $\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2}) = 1$ erhält man

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) && (1)\\
&= \frac{2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})} && (2)\\
&= \frac{2\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\cos(\frac{x}{2})}}{1 + \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\cos^2(\frac{x}{2})}} && (3)\\
&= \frac{2t}{1+t^2} && (4)
\end{aligned}$$

Mittels

$$\begin{aligned}
x &= 2\arctan(t) && (5)\\
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= 2\frac{1}{1+t^2} && (6)\\
\mathrm{d}x &= 2\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t && (7)
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
t &= \tan\left(\frac{x}{2}\right) && (8)\\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}t &= \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})} && (9)\\
\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\mathrm{d}x && (10)\\
&= \frac{\cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})}{2\cos^2(\frac{x}{2})}\mathrm{d}x && (11)\\
&= \frac{1+t^2}{2}\mathrm{d}x && (12)\\
\mathrm{d}x &= 2\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t && (13)
\end{aligned}$$

erhält man

$$\int (\sin(x))^{-1}\,dx = \int t^{-1}dt = \ln|t| + c = \ln|\tan(\frac{x}{2})| + c$$

.

---

6. (Integration) [1 P]

(a) Welche Fläche $F(r)$ hat ein Kreis mit Radius r? Bestimmen Sie zuerst die Fläche des Viertelkreises im ersten Quadranten. Diese Fläche entspricht genau einem Viertel der gesuchten Fläche.

(b) Wie ändert sich die Kreisfläche $F(r)$, wenn man den Radius r verändert? Bestimmen Sie dazu die Ableitung $\frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

Lösung:

(a) Um diese Frage zu beantworten, berechnen wir die Fläche unter dem Viertelkreis $\sqrt{r^2-x^2}$ mit den Grenzen $x=0$ und $x=r$. Diese Fläche entspricht genau einem Viertel der gesuchten Kreisfläche. Eine Stammfunktion von $\sqrt{r^2-x^2}$ ist $\frac{1}{2}[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)]$ (aus Tabelle 12.4 im Skript). Die Kreisfläche hat also den Wert $F(r)=4\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\left(\frac{x}{r}\right)\right]\Big|_0^r=2\cdot[r^2\arcsin(1)-r^2\arcsin(0)]=2r^2\pi/2=r^2\pi$.

Alternativ:

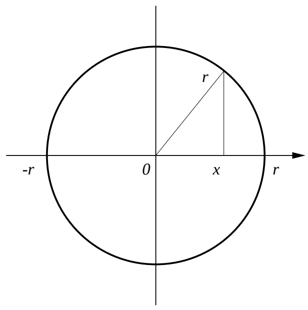
Die Substitution $x=r\cos(\varphi)$ ergibt

$$\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x=-\int_{\pi/2}^0 r\sqrt{1-\cos(\varphi)^2}r\sin(\varphi)\mathrm{d}\varphi=r^2\int_0^{\pi/2}\sin(\varphi)^2\mathrm{d}\varphi$$

Partielle Integration mit $u=\sin(\varphi)$ und $v'=\sin(\varphi)$ ergibt

$$r^2\int_0^{\pi/2}\sin(\varphi)^2\mathrm{d}\varphi=r^2\left[\frac{\varphi-\sin(\varphi)\cos(\varphi)}{2}\right]_0^{\pi/2}=\frac{r^2\pi}{4}$$

Diese Fläche entspricht genau einem Viertel der gesuchten Fläche $r^2\pi$.



(b) Wir können nun weiterhin die Frage stellen, wie sich die Kreisfläche ändert, wenn man den Radius r verändert. Mathematisch bedeutet dies, dass wir nach der Ableitung $\mathrm{d}F(r)/\mathrm{d}r$ der Kreisfläche nach dem Radius fragen. Führen wir die Ableitung durch, so erhalten wir den Ausdruck $\mathrm{d}F(r)/\mathrm{d}r=\pi\mathrm{d}(r^2)/\mathrm{d}r=2r\pi$. Auch diesen Ausdruck kennen Sie schon: es ist die Formel für den Umfang eines Kreises mit Radius r. Dieses Ergebnis erklärt sich dadurch, dass die Fläche eines Kreisrings mit innerem Radius r und Breite b durch die Differenz der Flächen zweier Kreise mit Radius $r+b$ und r, also durch $F(r+b)-F(r)=\pi[(r+b)^2-r^2]=\pi[2rb+b^2]=b\pi[2r+b]$ gegeben ist. Im Grenzfall $b\to 0$ kann der zweite Summand in der Klammer gegenüber dem ersten vernachlässigt werden. In diesem Grenzfall ist die Fläche des Kreisringes aber auch durch das Produkt von Breite und Umfang gegeben, so dass der Umfang eines Kreises mit Radius r in der Tat durch $2\pi r$ gegeben ist.

Mit dieser geometrischen Interpretation hätten wir die Fläche eines Kreises mit Radius r auch als Integral $\int_0^r(2\pi x)\mathrm{d}x=2\pi(x)|_0^r=2\pi[r^2/2-0]=\pi r^2$, erhalten können.