LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
Department Biologie II
Grosshadernerstr. 2
82152 Planegg-Martinsried

email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Telefon: 089-2180-74800
Fax: 089-2180-74803

7. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 29.11.2017

Abgabe am 28.11.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 7. und 8. Dezember besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Differentialgleichungen) [1 P]
Wir betrachten eine Bakterienkultur, die mit konstanter "pro-Kopf" Rate wächst. Stellen Sie die Differentialgleichung auf, welche dieses Wachstum "modelliert". Hat diese Gleichung eine stationäre Lösung?

Wir nehmen nun an, dass $x(t) = x_0 e^{bt}$ die von Ihnen aufgestellte Gleichung löst (Anfangsbedingung zur Zeit $t = 0$: x_0). Für welchen Wert von b stimmt dies, wenn die Kultur pro Tag um 10% wächst? Denken Sie dabei auch an die Einheit von b.

Lösung:
$\frac{d}{dt}x = f(x) = bx$, wobei x die Größe der Bakterienkultur und $b > 0$ die konstante "pro-Kopf" Wachstumsrate ist. Stationäre Lösung: $f(x^*) = 0$ ist erfüllt für $x^* = 0$ (da $b > 0$). Ansatz: $x(t) = x_0 e^{bt}$. Für $b = \ln(1.1)$ [Tag^{-1}] und t gemessen in Tagen erhält man $\frac{x(t+1)}{x(t)} = e^b = 1.1$.

---

2. (Differentialgleichungen, qualitative Analyse) [1 P]
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = x^2 - a.$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Machen Sie sich ein Bild von der Funktion $f(x) = x^2 - a$, indem Sie eine Skizze für $a = 4$ anfertigen. Führen Sie eine kurze Kurvendiskussion durch: Verhalten für $x \to \pm\infty$, Nullstellen, 1. Ableitung und Extremstellen in Abhängigkeit von a.

(c) Geben Sie alle stationären Lösungen $x(t) = x^*$ der Differentialgleichung für $a = 4$ an.

(d) Diskutieren Sie für $a = 4$ welche der stationären Lösungen stabil und welche instabil sind.

(e) Überlegen Sie für welche Werte von a stationäre Lösungen verschwinden bzw. auftauchen. Für welche Bereiche von a gibt es zwei stationäre Lösungen? Ab wann gibt es keine mehr? Skizzieren Sie mit Hilfe dieser Überlegungen die Werte der stationären Lösungen als Funktion von a und markieren Sie Bereiche unterschiedlicher Stabilität.

Lösung:

(a) Nichtlinear, 1. Ordnung.

(b) $f(x) = x^2 - 4$
$x \to \pm\infty : f(x) \to \infty$
Nullstellen: $x = \pm\sqrt{a}$, hier: $x = \pm 2$
$f'(x) = 2x \Rightarrow x_{\mathrm{E}} = 0$; Min bei $(0| - a)$; mit $a = 4$ $(0| - 4)$

(c) $f(x^*) = 0 \Rightarrow x^* = \pm\sqrt{a} = \pm 2$

(d) $f'(-2) = -4 \Rightarrow -4 < 0 \Rightarrow$ stabil
$f'(2) = 4 \Rightarrow 4 > 0 \Rightarrow$ instabil

(e) $a < 0$ keine stationären Lösungen
$a = 0$ eine stationäre Lösung bei $x^* = 0$
$a > 0$ zwei stationäre Lösungen

---

3. (Differentialgleichungen, qualitative Analyse) [1 P]
Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = (x+1)(x^2 + 2x - 2)$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Wie lauten die stationären Lösungen der Differentialgleichung? Sind sie stabil oder instabil?

(c) Skizzieren Sie die Lösungen $x(t)$ für verschiedene Anfangsbedingungen $x(0)$.

Lösung:

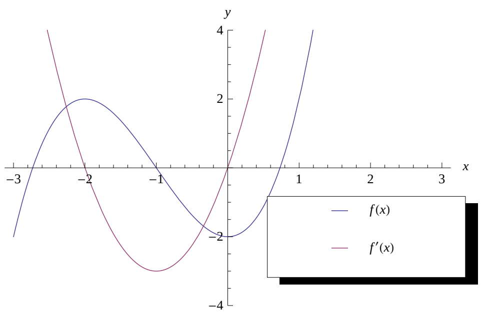
(a) Nichtlinear, 1. Ordnung.

(b) $0 = (x^* + 1)({x^*}^2 + 2x^* - 2) \quad \Rightarrow$

$x_1^* = -1$; asymptotisch stabil, da $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_1^*} < 0$

$x_{2,3}^* = -1 \pm \sqrt{3}$; instabil, da $\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{2,3}^*} > 0$

$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 3x(x+2)$



(c) Skizzieren Sie die Lösungen $x(t)$ für verschiedene Anfangsbedingungen $x(0)$.

---

4. (Differentialgleichungen) [1 P]
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -t^2 \cdot x$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Interpretieren Sie diese Differentialgleichung am Beispiel einer zeitabhängigen Population $x(t)$ und im Vergleich zur Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R}^+$.

(c) Geben Sie die stationäre Lösung der Differentialgleichung an, falls eine existiert.

(d) Wie heißt das Verfahren, um eine solche Differentialgleichung zu lösen?

(e) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!

(f) Skizzieren Sie die Lösung für $t \geq 0$ und für zwei verschiedene Werte von $x_0 = x(0)$.

Lösung:

(a) Linear, homogen, 1. Ordnung.

(b) Die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -c \cdot x$ mit $c \in \mathbb{R}^+$ beschreibt eine exponentielle Abnahme der Populationsgröße x mit der Rate c. Für die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -t^2 \cdot x$ ist diese Rate zeitabhängig $c(t) = t^2$, sodass der Zerfall ausgehend von der Rate 0 quadratisch in t zunimmt.

(c) $f(x) = -t^2 \cdot x = 0 \implies x* = 0$

(d) Separation der Variablen

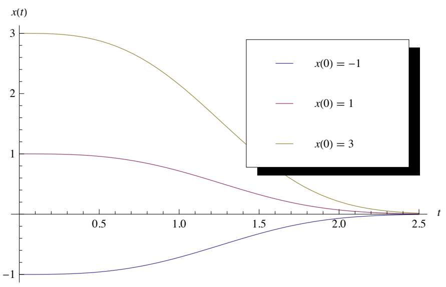
(e) Allgemeine Lösung der Differentialgleichung, mit $x(t_0) = x_0$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x} = -t^2 \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t_1)} \frac{\mathrm{d}x}{x} = -\int_{t_0}^{t_1} t^2 \mathrm{d}t \Leftrightarrow [\ln(x)]_{x_0}^{x(t_1)} = -\frac{1}{3}\left[t^3\right]_{t_0}^{t_1}$$

mit $t_1 = t$ und $t_0 = 0$ $\quad \Rightarrow x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3 + \ln x_0} = x_0\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}t^3}$

(f)



---

5. (Differentialgleichungen) [1 P]

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = x^{\frac{1}{2}}.$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) In welchem Bereich muss x_0 liegen, damit $x(t)$ reellwertig ist?

(c) Geben Sie die stationäre Lösung der Differentialgleichung an, falls eine existiert.

(d) Wie heißt das Verfahren, um eine solche Differentialgleichung zu lösen?

(e) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung!

(f) Skizzieren Sie die Lösung für $t \geq 0$ und für zwei verschiedene Werte von $x_0 = x(0)$.

(g) Welche Besonderheit existiert für $x_0 = 0$?

Lösung:

(a) Nichtlinear, 1. Ordnung.

(b) $x(t) \geq 0$

(c) $x(t) = 0$

(d) Separation der Variablen

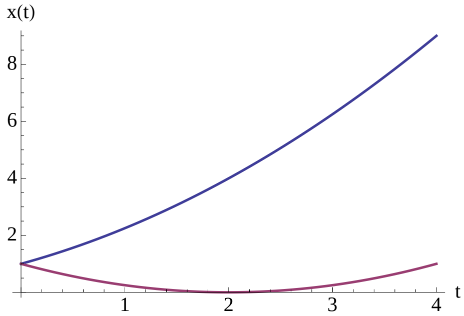
(e) Allgemeine Lösung der Differentialgleichung, mit $x(t_0) = x_0$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{2}}} = \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow \int_{x_0}^{x(t_1)} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\frac{1}{2}}} = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \Leftrightarrow 2\left[\sqrt{x}\right]_{x_0}^{x(t_1)} = [t]_{t_0}^{t_1}$$

mit $t_1 = t$ und $t_0 = 0$:

$$x(t) = \left(\frac{t}{2} + \sqrt{x_0}\right)^2.$$



Es sieht so aus (einsetzen in die Differentialgleichung), als ob auch

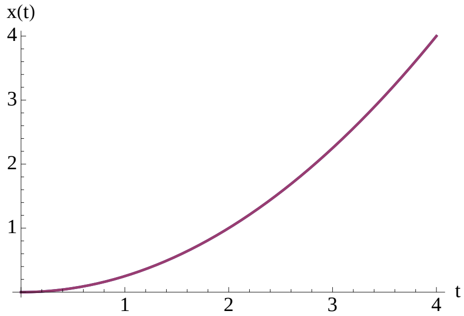
$$x(t) = \left(\frac{t}{2} - \sqrt{x_0}\right)^2$$

die Differentialgleichung erfüllt. Allerdings ist dies keine gültige Lösung, da für positive $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = x^{\frac{1}{2}} > 0$$

gelten muß, was aber für die zweite Lösung für $t < 2\sqrt{x_0}$ nicht der Fall ist.

(f)



(g) Bei $x_0 = 0$ ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)|_{x_0}$ nicht beschränkt, da $\lim_{x_0 \to 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)|_{x_0} = \infty$. Daher ist die Eindeutigkeit der Lösungen nicht mehr garantiert (siehe Kapitel 13.4.1 im Skript). Ein zweite triviale Lösung ist $x(t) = 0$.

---

6. (Differentialgleichungen, Separation der Variablen) [4 P]

Finden Sie die Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems $y(x_0) = y_0$ für die folgenden Differentialgleichungen durch Separation der Variablen für beliebiges $y_0 > 0$.

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = -5y^2 + y^2x^3$

(b) $x + y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = 0$

(c) $2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = \frac{y(x+1)}{x}$

(d) $-y + x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = 3$

Lösung:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = -5y^2 + y^2x^3 = y^2(-5 + x^3)$ mit $y_0 = y(x_0)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = (x^3 - 5)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^{y(x_1)} \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int_{x_0}^{x_1} (x^3 - 5)\mathrm{d}x \Leftrightarrow -\left[\frac{1}{y}\right]_{y_0}^{y(x_1)} = \left[\frac{x^4}{4} - 5x\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{y(x_1)} + \frac{1}{y_0} = \frac{x_1^4}{4} - 5x_1 - \frac{x_0^4}{4} + 5x_0$$

mit $x_1 = x$: $\quad y(x) = -\dfrac{1}{\frac{x^4}{4} - 5x - \frac{x_0^4}{4} + 5x_0 - \frac{1}{y_0}}$

(b) $\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}y + x = 0$ mit $y_0 = y(x_0)$

$$y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow \int_{y_0}^{y(x_1)} y\mathrm{d}y = -\int_{x_0}^{x_1} x\mathrm{d}x \Leftrightarrow \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_0}^{y(x_1)} = -\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x_1}$$

$\Leftrightarrow \dfrac{y^2(x_1)}{2} - \dfrac{y_0^2}{2} = -\dfrac{x_1^2}{2} + \dfrac{x_0^2}{2}$
mit $x_1 = x$: $\quad y(x) = \pm\sqrt{y_0^2 - x^2 + x_0^2}$

(c) $\quad 2\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = \dfrac{y(x+1)}{x}$ mit $y_0 = y(x_0)$

$2\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \dfrac{x+1}{x}\mathrm{d}x \quad \Rightarrow 2\displaystyle\int_{y_0}^{y(x_1)} \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = \int_{x_0}^{x_1} \dfrac{x+1}{x}\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} (1+\dfrac{1}{x})\mathrm{d}x$
$\Leftrightarrow 2\left[\ln|y|\right]_{y_0}^{y(x_1)} = \left[x + \ln|x|\right]_{x_0}^{x_1}$
mit $x_1 = x$: $\quad y(x) = y_0 \exp(\frac{1}{2}(x + \ln|x| - x_0 - \ln|x_0|))$

(d) $\quad x\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} - y = 3$ mit $y_0 = y(x_0)$

$\dfrac{\mathrm{d}y}{3+y} = \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \Rightarrow \displaystyle\int_{y_0}^{y(x_1)} \dfrac{\mathrm{d}y}{3+y} = \int_{x_0}^{x_1} \dfrac{\mathrm{d}x}{x} \Leftrightarrow \left[\ln|3+y|\right]_{y_0}^{y(x_1)} = \left[\ln|x|\right]_{x_0}^{x_1}$
mit $x_1 = x$: $\quad \ln|3 + y(x)| = \ln|x| - \ln|x_0| + \ln|3 + y_0|$
$\Rightarrow y(x) = \pm\dfrac{3+y_0}{x_0}x - 3$