LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
Department Biologie II
Grosshadernerstr. 2
82152 Planegg-Martinsried

email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Telefon: 089-2180-74800
Fax: 089-2180-74803

8. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 6.12.2017

Abgabe am 12.12.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 14. und 15. Dezember besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Differentialgleichungen, qualitative Analyse) [1 P]
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x^4 + 2x^2 + a.$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Berechnen Sie alle stationären Lösungen x^* der Differentialgleichung in Abhängigkeit von a. Dazu muss die rechte Seite der Gleichung null gesetzt werden. Überlegen Sie, durch welche Substitution dieses Problem auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt und damit gelöst werden kann.

(c) Diskutieren Sie für $a = -0.5$ welche der stationären Lösungen stabil und welche instabil sind.

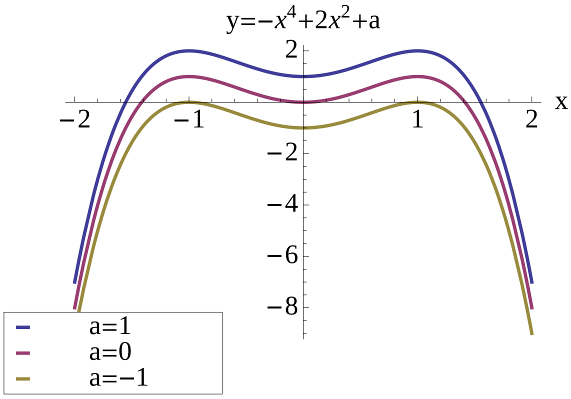
(d) Überlegen Sie für welche Werte von a stationäre Lösungen verschwinden bzw. auftauchen. Für welche Bereiche von a gibt es wieviele stationäre Lösungen? Ändert sich die Stabilität der stationären Lösungen? Skizzieren Sie mit Hilfe dieser Überlegungen die Werte der stationären Lösungen als Funktion von a und markieren Sie Bereiche unterschiedlicher Stabilität.

Lösung:

(a) Nichtlinear, 1. Ordnung.

(b) Berechnen Sie alle stationären Lösungen x^* der DGL in Abhängigkeit von $a \in \mathbf{R}$.

$-x^4+2x^2+a = -(x^2-1)^2+1+a \Rightarrow x^2 = 1\pm\sqrt{1+a}$.
$\Rightarrow \quad x^* = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1+a}}$
Für $a < -1$ gibt es *keine* reellen stationären Lösungen.
Für $a = -1$ gibt es genau zwei stationäre Lösungen.
Für $-1 < a < 0$ gibt es vier reelle stationäre Lösungen.
Für $a = 0$ gibt es genau drei stationäre Lösungen.
Für $a > 0$ gibt es zwei stationäre Lösungen.



(c) Diskutieren Sie welche der stationären Lösungen stabil und welche instabil sind.

Mit $f(x) = -x^4 + 2x^2 + a \qquad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -4x^3 + 4x = 4x(-x^2+1);$

Also, für $x^* = -\sqrt{1+\sqrt{1+a}}$,
$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*} = 4\sqrt{1+\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} = -4(\sqrt{1+a})x^* > 0$, da $x^* < 0$. $\Rightarrow$ instabil

Für $x^* = -\sqrt{1-\sqrt{1+a}}$,
$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*} = -4\sqrt{1-\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} = 4(\sqrt{1+a})x^* < 0$, da $x^* < 0$. $\Rightarrow$ asymptotisch stabil

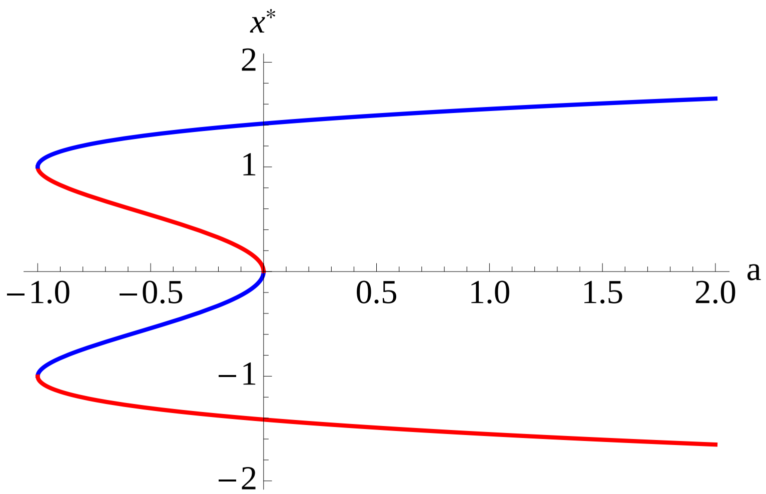
Für $x^* = \sqrt{1-\sqrt{1+a}}$,
$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*} = 4\sqrt{1-\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} = 4(\sqrt{1+a})x^* > 0$, da $x^* > 0$. $\Rightarrow$ instabil

Für $x^* = \sqrt{1+\sqrt{1+a}}$,
$\left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x^*} = -4\sqrt{1+\sqrt{1+a}}\sqrt{1+a} = -4(\sqrt{1+a})x^* < 0$, da $x^* > 0$. $\Rightarrow$ asymptotisch stabil

Für $a = 0$ lautet die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = -x^4 + 2x^2$, mit stationären Lösungen $x^* = 0, \pm\sqrt{2}$. Eine Linearisierung um den Fixpunkt $x^* = 0$ mit $x = x^* + \delta x$ führt zu $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta x(t) = 0$. Dieser Marginalfall ist aber nicht asymptotisch stabil. Das Gleiche gilt bei $a = -1$ für die stationären Lösungen $x^* = \pm 1$. Bei den anderen beiden stationären Lösungen für $-1 < a < 0$ gilt eine ähnliche Analyse.

Oder einfacher: Man bemerke, daß die Extrema (Nullstellen von $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -4x^3 + 4x = 4x(-x^2+1)$) bei $x = \pm 1$ und $x = 0$ liegen, egal, wie groß a ist. Der Punkt $x = 0$ ist immer ein Minimum, die beiden anderen Extrema sind Maxima (so wie in der Abbildung). Beim negativsten Fixpunkt $x^* = -\sqrt{1+\sqrt{1+a}}$ wächst $f(x)$, also ist dieser Fixpunkt instabil. Hingegen fällt $f(x)$ beim positivsten Fixpunkt $x^* = \sqrt{1+\sqrt{1+a}}$, also ist der entsprechende Fixpunkt asymptotisch stabil.

(d) Zeichnen Sie die stationären Lösungen als Funktion von a und markieren Sie deren Stabilität.
Beachtung der Bifurkationen bei $a = -1$ und $a = 0$ und der Symmetrie der stationären Lösungen ist wichtig, um eine qualitative Skizze anzufertigen.



Stabile stationäre Lösungen in blau, instabile stationäre Lösungen in rot.

---

2. (Differentialgleichungen) [1 P]
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\beta \cdot x + \gamma \cdot e^{-\alpha t}$$

mit den Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$. Als Anfangsbedingung sei $x(0) = 0$.

(a) In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass für $\alpha = \beta$ die Lösung

$$x(t) = \gamma \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$

lautet. Untersuchen Sie diese Funktion: Wie verhält sie sich für kleine t? Wo hat sie ihr Maximum? Wie groß ist x_{max}? Wie verhält sich $x(t)$ für $t \to \infty$? Wie groß ist die Fläche zwischen t-Achse und $x(t)$?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\alpha \neq \beta$. Als Lösung sollten Sie erhalten:

$$x(t) = \frac{\gamma}{\beta - \alpha}\left[e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right]$$

(c) Untersuchen Sie diese Funktion nach den selben Kriterien wie in (a).

(d) Was geschieht, wenn Sie α und β vertauschen? Was bedeutet dies für die Interpretation der Lösung?

Lösung:

(a) $x(t) = \gamma \cdot t \cdot e^{-\beta t}$

Wie verhält sie sich für kleine t?
$\lim_{t\to 0} x(t) = 0$

Wie verhält sich $x(t)$ für $t \to \infty$?
$\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to\infty} \frac{\gamma}{\beta e^{\beta t}} = 0$

Wo hat sie ihr Maximum?
Extremwert bei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\gamma \cdot t \cdot e^{-\beta t}\right) = \gamma \cdot e^{-\beta t} - \beta \cdot \gamma \cdot t \cdot e^{-\beta t} = e^{-\beta t}(\gamma - \beta \cdot \gamma \cdot t) = 0 \implies t = \frac{1}{\beta}$.
Maximum, da $x(\frac{1}{\beta}) > 0$ (siehe nächster Punkt) und $\lim_{t\to 0} x(t) = \lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Wie groß ist x_{max}?
$x_E = x(\frac{1}{\beta}) = \frac{\gamma}{\beta} \cdot e^{-1} > 0$, da $\gamma, \beta > 0$.

Wie groß ist die Fläche zwischen t-Achse und $x(t)$?
$\int_{t_0=0}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = \gamma \int_0^{\infty} t \cdot e^{-\beta t}\mathrm{d}t$. Partielle Intergration mit $u = t, u' = 1, v' = e^{-\beta t}$ und $v = -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t}$ ergibt $\int_0^{\infty} t \cdot e^{-\beta t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{\beta} e^{-\beta t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\frac{1}{\beta} e^{-\beta t}\mathrm{d}t = \left[-\frac{t}{\beta} e^{-\beta t} - \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta t}\right]_0^{\infty} = -0 - 0 + 0 + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\beta^2}$ und $\int_{t_0=0}^{\infty} x(t)\mathrm{d}t = \frac{\gamma}{\beta^2}$.

(b) Inhomogene linear DGL erster Ordnung: Lösung durch Variation der Konstanten.

Dazu betrachten wir zuerst die zugeordnete homogene Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_h(t) = -\beta x_h(t) \ , \tag{1}$$

deren allgemeine Lösung wir schon kennen,

$$x_h(t) = c\,\mathrm{e}^{-\beta t} \qquad \text{mit} \qquad c \in \mathbb{R} \ . \tag{2}$$

Um die inhomogene Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = -\beta x(t) + \gamma\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \tag{3}$$

zu lösen machen wir den Ansatz

$$x(t) = z(t) x_h(t) = z(t) c\,\mathrm{e}^{-\beta t} \ . \tag{4}$$

Setzen wir diesen Ansatz in (3) ein, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} z(t) = \frac{y(t)}{x_h(t)} = \frac{\gamma \mathrm{e}^{-\alpha t}}{c\ \mathrm{e}^{-\beta t}} = \frac{\gamma}{c} \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} \ . \tag{5}$$

Diese Differentialgleichung kann exakt integriert werden, wobei allerdings zwei unterschiedliche Fälle getrennt zu betrachten sind.

(A) Der Fall $\alpha = \beta$ wurde bereits in der Vorlesung behandelt.

(B) Falls $\alpha \neq \beta$, so kann (5) ebenfalls elementar integriert werden,

$$\int_{z(t_0)}^{z(t_1)} \mathrm{d}z = \frac{\gamma}{c} \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t}\mathrm{d}t, \tag{6}$$

oder

$$z(t_1) - z(t_0) = \frac{\gamma}{c} \frac{1}{\beta - \alpha} [\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t_1} - \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t_0}] \ . \tag{7}$$

Mit den Werten von Start- und Endpunkt, $t_0 = 0$ und $t_1 = t$, erhalten wir also

$$z(t) = \frac{\gamma}{c} \frac{1}{\beta - \alpha} [\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} - 1] + z(0) \ . \tag{8}$$

Nach Einsetzen in (4),

$$x(t) = \left\{ \frac{\gamma}{c} \frac{1}{\beta - \alpha} [\mathrm{e}^{(\beta-\alpha)t} - 1] + z(0) \right\} \cdot c\mathrm{e}^{-\beta t}, \tag{9}$$

kann der Wert von $z(0)$ wieder aus der Anfangsbedingung $x(0) = 0$ bestimmt werden, und es folgt daraus auch im nun betrachteten Fall: $z(0) = 0$. Damit erhalten wir insgesamt:

$$x(t) = \frac{\gamma}{\beta - \alpha} \left[\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t} \right] \ . \tag{10}$$

(c) $x(t) = \frac{\gamma}{\beta - \alpha} \left[\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t} \right]$

Wie verhält sie sich für kleine t?
$\lim_{t \to 0} x(t) = 0$

Wie verhält sich $x(t)$ für $t \to \infty$?
$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 - 0 = 0$

Wo hat sie ihr Maximum?
Extremwert bei $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\gamma}{\beta-\alpha} \left[\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t} \right] \right) = \frac{\gamma}{\beta-\alpha} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t} \right) = \frac{\gamma}{\beta-\alpha} \left(-\alpha \mathrm{e}^{-\alpha t} + \beta \mathrm{e}^{-\beta t} \right) = \frac{\gamma}{1-\frac{\beta}{\alpha}} \mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{\gamma}{1-\frac{\alpha}{\beta}} \mathrm{e}^{-\beta t} = 0.$
Falls $\beta < \alpha$ erhalten wir $\frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} \mathrm{e}^{-\alpha t} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}-1} \mathrm{e}^{-\beta t} > 0$ und
$\ln \left(\frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} \mathrm{e}^{-\alpha t} \right) = \ln \left(\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}-1} \mathrm{e}^{-\beta t} \right)$
$t = \frac{1}{\alpha-\beta} \ln(\frac{\alpha}{\beta})$.
Falls $\beta > \alpha$ erhalten wir $-\frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} \mathrm{e}^{-\alpha t} = -\frac{1}{\frac{\alpha}{\beta}-1} \mathrm{e}^{-\beta t} > 0$ und mittels $\ln$ ebenfalls
$t = \frac{1}{\alpha-\beta} \ln(\frac{\alpha}{\beta})$.

Maximum, da $x_E > 0$ (siehe nächster Punkt) und $\lim_{t \to 0} x(t) = \lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Wie groß ist x_{max}?
$x_E = x(\frac{1}{\alpha-\beta} \ln(\frac{\alpha}{\beta})) = \frac{\gamma}{\beta-\alpha} \left[\mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{\alpha-\beta} \ln(\frac{\alpha}{\beta})} - \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\alpha-\beta} \ln(\frac{\alpha}{\beta})} \right] = \frac{\gamma}{\beta-\alpha} \left[(\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\alpha}{\alpha-\beta}} - (\frac{\beta}{\alpha})^{\frac{\beta}{\alpha-\beta}} \right] > 0$, da $\alpha, \beta, \gamma > 0$.

Wie groß ist die Fläche zwischen t-Achse und $x(t)$?
$\int_{t_0=0}^{\infty} x(t) \mathrm{d}t = \frac{\gamma}{\beta-\alpha} \int_0^{\infty} \left[\mathrm{e}^{-\alpha t} - \mathrm{e}^{-\beta t} \right] \mathrm{d}t = \frac{\gamma}{\beta-\alpha} \left[-\frac{1}{\alpha} \mathrm{e}^{-\alpha t} + \frac{1}{\beta} \mathrm{e}^{-\beta t} \right]_0^{\infty} = \frac{\gamma}{\beta-\alpha} (\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}) = \frac{\gamma}{\alpha\beta}$

(d) Die Lösung $x(t)$ bleibt unverändert bei Vertauschung von α und β.

---

3. (Differentialgleichungen) [1 P]

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x = \frac{1}{k \cos(l\, x)}$$

mit $k,\ l \in \mathbb{R}$ und $k,\ l \neq 0$.

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Führen Sie eine qualitative Analyse der Differentialgleichung durch.

(c) Welches Verfahren kann man zum Lösen einer solchen Differentialgleichung verwenden?

(d) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(e) Ist diese Lösung für alle $t > 0$ definiert? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Lösung:

(a) Nicht-lineare DLG, 1. Ordnung

(b) $f(x) = \frac{1}{k\ \cos(l\,x)}$ ist nur für $\cos(l\,x) \neq 0$ definiert. Daraus folgt $x \in ((n+1/2)\pi, (n+3/2)\pi)$ für $n \in \mathbb{Z}$, wobei $\lim_{x\to(n+1/2)\pi} f(x) = \pm\infty$. Keine stationäre Lösung vorhanden, da $f(x) \neq 0$ für alle x.

(c) Separation der Variabeln

(d) $$\int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t = k \int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \cos(l\,x)\mathrm{d}x$$
$$t_1 - t_0 = \frac{k}{l}\left\{\sin[l\,x(t_1)] - \sin[l\,x(t_0)]\right\}$$
$$x(t_1) = \frac{1}{l}\arcsin\left(\frac{l\,(t_1-t_0)}{k} + \sin[l\,x(t_0)]\right)$$
Wenn man möchte kann man noch (wie in den Übungen oft gemacht) das Ergebnis mit $t := t_1$, $t_0 = 0$ darstellen. Dies soll aber nicht explizit verlangt sein: $x(t) = \frac{1}{l}\arcsin\left(\frac{l\,t}{k} + \sin[l\,x(t_0)]\right)$.

(e) Die Lösung ist nur auf einem Interval definiert, sodass $\left(\frac{l\,t}{k} + \sin[l\,x(t_0)]\right)$ im Interval $[-1, 1]$ liegt, da dies dem Defintionsbereich des Arkussinus entspricht.

---

4. (Differentialgleichungen, lineare Stabilitätsanalyse) [2 P]

Betrachten Sie die Differentialgleichungen

A) $\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = x^2 - 1$

B) $\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\frac{1}{x^3}$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0 > 0$ und der Konstanten $\tau > 0$.

(a) Um was für Differentialgleichungstypen handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -\frac{1}{x^3}$ (mit Beschriftung der Achsen!).

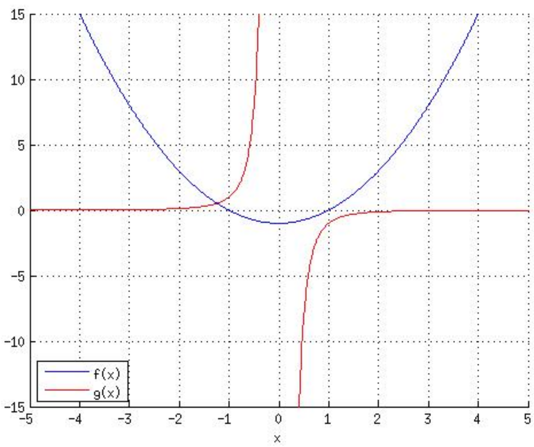
(c) Führen Sie eine qualitative Analyse der Differentialgleichungen durch.

(d) Diskutieren Sie die Stabilität der stationären Lösungen (lineare Stabilitätsanalyse). Versuchen Sie zu ergründen, warum die *lineare* Stabilitätsanalyse für Differentialgleichung B nicht funktioniert. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Resultaten zur qualitativen Analyse.

Lösung:

(a) A) 1. Ordnung, nichtlinear. B) 1. Ordnung, nichtlinear.

(b)



(c) A) Stationäre Lösung bei $x^* = \pm 1$. Instabil für $x^* = 1$, da $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} > 0$, und asymptotisch stabil für $x^* = -1$, da $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} < 0$. $f(x)$ und $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ sind stetig für alle x und t, daher gibt es eine eindeutige Lösung.

B) Keine stationäre Lösung, da $g(x) \neq 0$ für $x \neq 0$ und für $x = 0$ nicht definiert ist. Für $x \in (-\infty, 0)$ oder $x \in (0, \infty)$ sind $f(x)$ und $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ stetig und es gibt eine eindeutige Lösung.

(d) A) Die allgemeine Lösung der Linearisierung (siehe Skriptum 14.48) lautet für $x^* = -1$

$$x(t) = -1 + Ce^{-\frac{2t}{\tau}}.$$

Man erhält eine exponentiell relaxierende (asymptotisch stabile) Lösung. Für $x^* = 1:$

$$x(t) = 1 + Ce^{\frac{2t}{\tau}}.$$

Man erhält eine exponentiell anwachsende Lösung. Zusätzlich zum qualitativen Verhalten erhält man eine quantitative Beschreibung von x in der Nähe der stationären Lösungen.

B) Es gibt keine stationäre Lösung, daher auch keine Linearisierung um eine stationäre Lösung. Die Ableitung von $g(x)$ divergiert für $x \to 0$ gegen $\pm\infty$ und ist für $x = 0$ nicht definiert.