LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
Department Biologie II
Grosshadernerstr. 2
82152 Planegg-Martinsried

email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Telefon: 089-2180-74800
Fax: 089-2180-74803

9. Übung/Lösung— Mathematik für Studierende der Biologie — 13.12.2017

Abgabe am 19.12.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 21. und 22. Dezember besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Gedämpfter harmonischer Oszillator) [2 P]

In der Vorlesung wurde die Differentialgleichung des gedämpften harmonischen Oszillators

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t)+\gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)+k\cdot x(t)=0$$

mit Hilfe eines Exponentialansatzes, $x(t)=A\cdot e^{\lambda t}$, gelöst, wobei sich ergab:

$$\lambda_{1/2}=\frac{1}{2m}\left[-\gamma\pm\sqrt{D}\right]\qquad\text{mit } D=\gamma^2-4mk.$$

(a) Für $D<0$ ergeben sich zwei komplexwertige Lösungen. Formen Sie diese mit Hilfe der Identitäten $e^{ia}=\cos(a)+\mathrm{i}\sin(a)$ und $e^{-ia}=\cos(a)-\mathrm{i}\sin(a)$ in physikalisch sinnvolle reellwertige Lösungen um.

(b) Für $D=0$ fallen beide Lösungen zusammen und es gilt $\lambda=-\frac{\gamma}{2m}$. Um in diesem Fall eine zweite Lösung zu erhalten (ansonsten kann man die unabhängigen Anfangsbedingungen an x und $\dot{x}$ nicht erfüllen) versuchen wir den Ansatz

$$x(t)=y(t)\cdot e^{\lambda t}.$$

Setzen Sie diesen in die ursprüngliche Differentialgleichung ein, und zeigen Sie unter Verwendung von $m\lambda^2+\gamma\lambda+k=0$ und $\lambda=-\frac{\gamma}{2m}$, dass $y(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}y(t)=0$$

erfüllt. Wie lautet die Lösung $y(t)$? Geben Sie damit die Lösung $x(t)$ an.

Lösung:

(a) Für $D<0$ besitzt die Differentialgleichung zwei *komplexwertige* Lösungen

$$\lambda_{1/2}=\frac{-\gamma\pm\mathrm{i}\sqrt{4mk-\gamma^2}}{2m}\ . \tag{1}$$

Auf den ersten Blick mag das Auftreten komplexer Zahlen verwundern, da $x(t)$ beispielsweise die Auslenkung eines Federpendels beschreibt, und damit eine *reellwertige* Größe ist. Da jedoch die beiden komplexen Zahlen λ_1 und λ_2 zueinander konjugiert-komplexe Zahlen sind, kann man sie auch als

$$\lambda_{1/2}=\kappa\pm\mathrm{i}\omega\quad\text{mit}\quad\kappa=\frac{-\gamma}{2m}\quad\text{und}\quad\omega=\frac{\sqrt{4mk-\gamma^2}}{2m} \tag{2}$$

schreiben. Greift man auf das Superpositionsprinzip zurück und addiert beziehungsweise subtrahiert die beiden entsprechenden Lösungen x_1 und x_2,

$$x_1(t)=\mathrm{e}^{\kappa t+\mathrm{i}\omega t}\quad\text{und}\quad x_2(t)=\mathrm{e}^{\kappa t-\mathrm{i}\omega t}\ , \tag{3}$$

so kann man die Beziehungen zwischen Sinus, Cosinus und komplexer Exponentialfunktion ausnützen. Es gilt nämlich

$$\cos(a) = \frac{\exp(\mathrm{i}a) + \exp(-\mathrm{i}a)}{2}$$

und

$$\sin(a) = \frac{\exp(\mathrm{i}a) - \exp(-\mathrm{i}a)}{2\mathrm{i}} \; .$$

Damit lassen sich zwei *reellwertige* Lösungen formulieren,

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{2}[x_1(t) + x_2(t)] = \cos(\omega t)\mathrm{e}^{\kappa t} \tag{4}$$

und

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}[x_1(t) - x_2(t)] = \sin(\omega t)\mathrm{e}^{\kappa t} \; . \tag{5}$$

Damit sind zwei spezielle reellwertige Lösungen gefunden. Die allgemeine Lösung wird dann wieder als $x(t) = C_1\tilde{x}_1(t) + C_2\tilde{x}_2(t)$ geschrieben, die reellen Konstanten C_1 und C_2 aus den jeweiligen Anfangsbedingungen bestimmt.

Physikalisch gesehen treten also bei kleiner Dämpfung des Systems ($\gamma^2 < 4mk$) exponentiell gedämpfte Sinus- bzw. Cosinus-Schwingungen auf. Dabei wird eine Schwingung umso langsamer abklingen, je kleiner die Dämpfungskonstante γ ist. Für den idealisierten Fall $\gamma = 0$ bleibt die Schwingung für alle Zeiten erhalten und die Schwingungsfrequenz ω ist nach (2) durch $\sqrt{k/m}$ gegeben. Mit zunehmender Dämpfung γ verringert sich schließlich die Schwingungsfrequenz ω.

(b) Verschwindet im obigen Beispiel die Diskriminante, so liefert der Ansatz $x(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda t}$ nur *eine* Lösung. Die Differentialgleichung ist aber weiterhin von zweiter Ordnung, so dass zwei Anfangsbedingungen frei gewählt werden können, beispielsweise $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ und $x(0)$. Die Lösung $x(t) = C_1\mathrm{e}^{\lambda t}$ enthält jedoch mit C_1 nur einen freien Parameter. Was ist zu tun?

Wählt man den Ansatz der Form $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \cdot y(t)$, erhält man mit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) &= \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\left(y(t)\cdot e^{\lambda t}\right) = \left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}y(t)\right)e^{\lambda t} + y(t)\lambda e^{\lambda t} \\
\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}x(t) &= \left(\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t)\right)e^{\lambda t} + 2\left(\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}y(t)\right)\lambda e^{\lambda t} + y(t)\lambda^2 e^{\lambda t} \\
&= \left(\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t)\right)e^{\lambda t} + 2\lambda\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) - \lambda^2 x(t)
\end{aligned}$$

mit $m\lambda^2 + \gamma\lambda + k = 0$ (Einsetzen des Exponentialansatzes in die ursprüngliche Differentialgleichung), $\lambda = -\frac{\gamma}{2m}$ und $\gamma^2 = 4mk$ (folgt aus $D = 0$) die Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}x(t) + \gamma\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) + k\cdot x(t) &= 0 \\
m\left(\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t)\right)e^{\lambda t} + (\gamma + 2m\lambda)\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) + (k - m\lambda^2)\cdot x(t) &= 0 \\
m\left(\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t)\right)e^{\lambda t} + 0\cdot\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}x(t) + 0\cdot\cdot x(t) &= 0 \\
\frac{\mathsf{d}^2}{\mathsf{d}t^2}y(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Definiert man $v(t) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}y(t)$ erhält man die Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}v(t) = 0$ und die Lösungen $v(t) = C_2$, $y(t) = C_1 + C_2 t$ und $x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}(C_1 + C_2 t)$. Für $C_2 = 0$ entspricht dies genau der schon bekannten Lösung, für $C_2 \neq 0$ hat man die gesuchte zweite Lösung gefunden. Physikalisch nennt man diese spezielle Situation auch "aperiodischen Grenzfall", da hier gerade keine Oszillationen mehr auftreten.

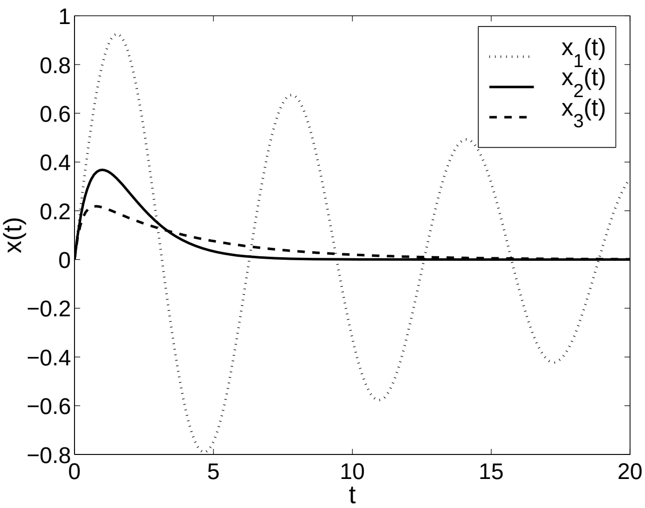

Illustration der verschiedenen Lösungstypen eines gedämpften harmonischen Oszillators. Drei Lösungen der Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x(t) + \gamma\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x(t)$ mit $m = k = 1$ zum Anfangswert $x(0) = 0$ und $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} = 1$ sind dargestellt. Der Lösungstyp hängt vom Wert der Diskrimante D ab (hier $D = \gamma^2 - 4$). Für $\gamma^2 < 4$ ist die Diskrimante negativ und man erhält eine gedämpfte harmonische Schwingung wie $x_1(t)$ (mit $\gamma = 0.1$). Für $\gamma^2 = 4$ verschwindet die Diskriminante. Die entsprechende Lösung $x_2(t)$ wird auch als aperiodischer Grenzfall bezeichnet. Ist schließlich $\gamma^2 > 4$, so ist die Diskrimante positiv. Das Beispiel $\gamma = 4$ führt zur stark überdämpften Lösung $x_3(t)$. Der qualitative Unterschied zwischen den beiden letzten Lösungen — $x_2(t)$ ist eine Lösung der Form $te^{\lambda t}$, $x_3(t)$ ist die Differenz zweier Exponentialfunktionen — ist nicht sichtbar, aus dem Vergleich aller drei Lösungen wird jedoch deutlich, dass die maximal erreichte Schwingungsamplitude stark von der Dämpfung γ abhängt.

---

2. (Lineare Gleichungssysteme, Gaußsche Elimination) [2 P]

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens. Geben Sie an, ob die Lösung exisitiert, und wenn ja, einen Punkt oder eine Gerade beschreibt.

(a)
$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 1 \\ x - y &= -1 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} 3x - 3y &= 1 \\ x - y &= 1/3 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 3x + 3y &= 0 \\ 2x - 2y &= 4 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 7x - 5y &= 0 \\ 14x - 10y &= 1 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 0 \\ -4x - 10y &= 0 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} 2x - y &= -2 \\ -3x + \tfrac{3}{2}y &= 3 \end{aligned}$$

Lösung:

(a) Keine Lösung.

(b) Lösung ist die Gerade $x = \frac{1}{3} + y$.

(c) Punktlösung (1,-1).

(d) Keine Lösung.

(e) Lösung ist die Gerade $2x + 5y = 0$.

(f) Lösung ist die Gerade $2x - y = -2$.

3. (Lineare Gleichungssysteme, Gaußsche Elimination) [1 P]

Lösen Sie die folgenden Gleichungen mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren:

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 8 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & -4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ 3x & + & y & - & z & = & -1 \\ 2x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array}$$

Lösung:

(a) Eliminieren wir zuerst x:

$$\begin{aligned} -\frac{5}{2}y + \frac{7}{2}z =& 3 - 3/28 = -9 \\ 3z =& -12 \end{aligned}$$

Dadurch bekommen wir direkt $z = -4$. Durch Einsetzen in die zweite Gleichung

$$-\frac{5}{2}y + \frac{7}{2}z = -9 \Leftrightarrow -\frac{5}{2}y + \frac{7}{2}(-4) = -9 \Rightarrow y = -2.$$

Nun benutzen wir z.B. die erste Gleichung $2x + y - z = 8 \Leftrightarrow 2x - 2 + 4 = 8$, um die Antwort $x = 3$ zu bekommen

Endergebnis: $x = 3, y = -2, z = -4$.

(b)

$$\begin{array}{rrcrcrcr} \text{(I)} & x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ \text{(II)} & 3x & + & y & - & z & = & -1 \\ \text{(III)} & 2x & - & 3y & + & 2z & = & 3 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrcrcrcr} \text{(I)} & x & - & 2y & + & z & = & -2 \\ \text{(II)-3(I)} & & & 7y & - & 4z & = & 5 \\ \text{(III)-2(I)} & & & y & & & = & 7 \end{array}$$

$\Rightarrow y = 7$

$7y - 4z = 5 \quad \Rightarrow \quad 49 - 4z = 5 \quad \Rightarrow \quad z = 11$

$x - 2y + z = -2 \quad \Rightarrow \quad x - 14 + 11 = -2 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$\Rightarrow$ Lösung ist Punkt $(1, 7, 11)$

4. (Matrizen) [1 P]

Gegeben sind vier Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, soweit möglich:

(a) $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{B}^T$, $\mathbf{C}^T$, $\mathbf{D}^T$ (b) $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, $\mathbf{B} - 2\mathbf{A}$, $3\mathbf{C}^T + \mathbf{D}$, $\mathbf{C} + \mathbf{D}$

Lösung:

(a) $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}-2\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, $3\mathbf{C}^T+\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -6 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C}+\mathbf{D}$ nicht möglich.

---

5. (Matrixmultiplikation, transponierte Matrix) [1 P]

Gegeben sind zwei Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

und zwei Vektoren $\vec{x} = (1,-1,2)^T, \vec{y} = (1,0,1)^T$. Berechnen Sie:

(c) $\mathbf{A}\vec{x}$ (d) $\mathbf{A}^T\vec{y}$ (e) $\mathbf{B}\vec{x}$ (f) $\vec{x}^T\mathbf{A}^T$ (g) $(\mathbf{B}^T\vec{y})^T\vec{x}$

Lösung:

(a) $\mathbf{A}\vec{x} = (1,9,0)^T$

(b) $\mathbf{A}^T\vec{y} = (-2,-1,1)^T$

(c) $\mathbf{B}\vec{x} = (-3,3,3)^T$

(e) $\vec{x}^T\mathbf{A}^T = (1,9,0)$

(f) 0
