LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
Department Biologie II
Grosshadernerstr. 2
82152 Planegg-Martinsried

email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Telefon: 089-2180-74800
Fax: 089-2180-74803

2. Übung — Mathematik für Studierende der Biologie — 25.10.2017

Abgabe in den Tutorien. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 2. und 3. November besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Iterierte Abbildung) [1 P]

Zusammenhang zwischen den Lösungen einer inhomogenen linearen Iterierten Abbildung $x_{t+1} = ax_t + b$.

(a) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Differenz $y_t = v_t - w_t$ der Folgenglieder v_t und w_t zweier beliebiger Lösungen der inhomogenen Abbildung (mit $v_{t+1} = av_t + b$ und $w_{t+1} = aw_t + b$) die zugeordnete homogene Iterierte Abbildung $y_{t+1} = ay_t$ erfüllt.

(b) Die allgemeine Lösung dieser homogenen Abbildung ist $h_t = Ca^t$ wobei C eine beliebige reellwertige Konstante ist. Zeigen Sie durch Einsetzen, dass h_t die homogene Abbildung auch wirklich löst.

(c) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die konstante Lösung, $(x_t^*)_{t\in N}$ mit $x_t^* = b/(1-a)$ für $a \neq 1$ eine einfache spezielle Lösung der inhomogenen Abbildung ist.

(d) Verwenden Sie die Aussage von (a) um zu zeigen, dass die Folgenglieder w_t der allgemeinen Lösung der inhomogenen Abbildung als $w_t = x_t^* + h_t$ geschrieben werden können.

(e) Wie muss die Konstante C gewählt werden, damit w_0 einem vorgegebenen Startwert x_0 entspricht?

(f) Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für w_t mit dem in der Vorlesung hergeleiteten Ergebnis (graue Box unter Gleichung 6.9 im Skript).

2. (Ableitungsregeln) [2 P]

Berechnen Sie die erste Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f$ der Funktionen

(a) $f(x) = x + 2$	(b) $f(x) = 4\,x$	(c) $f(x) = x^3/6 + 2/x$
(d) $f(x) = \sqrt{x}\,(x+1)\,e^x$	(e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2}$	(f) $f(x) = x^2 \cdot e^x$
(g) $f(x) = \log_2 x$	(h) $f(x) = \ln \dfrac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$	(i) $f(x) = e^{-1/x^2}$
(j) $f(x) = \ln(42 \cdot k)$	(k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + t^2}}$	(l) $f(x) = \log_{42}(42^{e^x})$
(m) $f(x) = (\ln x)\ln(\ln x) - \ln x$	(n) $f(x) = \log_a\left(\dfrac{a+x}{a-x}\right)$	(o) $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$

3. (Extremwerte) [2 P]

Bestimmen Sie die Extremwerte der untenstehenden Funktionen.

(a) $f(x) = x\,(1-x)$	(b) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2\,x}{x^2 - 4}$
(c) $f(x) = \ln(x + x^{-1})$	(d) $f(x) = \cosh(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$

(bitte wenden)

4. (Summen) [1 P]

Berechnen Sie folgende Summen:

(a) $\sum_{i=1}^{4} i$ (b) $\sum_{q=1}^{4} 2^q$

(c) $\sum_{q=3}^{5} (q-2)^2$ (d) $\sum_{m=1}^{5} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{m}$

5. (Taylor-Entwicklung) [1 P]

Entwickeln Sie folgende Funktionen bis zur 3. Ordnung am angegebenen Punkt x_0.

(a) $f(x) = \ln(x),\ x_0 = 1$ (b) $f(x) = \sin(x),\ x_0 = 0$ (c) $f(x) = e^x,\ x_0 = 0$

(d) Berechnen Sie die erste Ableitung der Taylor-Entwicklung aus c). Was stellen Sie fest?

6. (de l'Hospital) [2 P]

Berechnen Sie die Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x}$ (b) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{1-x}$ (c) $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}, \quad n \in \mathbb{N}$

(d) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2-x)}{1-x}$ (e) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1-x)+x^2}{\ln(1-x^2)+e^x}$ *(f) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x(x+a)} - x\right)$

*(g) $\lim_{x\to 0} x(\ln x)^n, \quad n \in \mathbb{N}$ *(h) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$ *(i) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$

Hinweis: Umwandlung in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ Formen. *(f-i): Aufgaben für Fortgeschrittene.