LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

PROF. ANDREAS HERZ, DR. STEFAN HÄUSLER
DEPARTMENT BIOLOGIE II
GROSSHADERNERSTR. 2
82152 PLANEGG-MARTINSRIED

EMAIL: HAEUSLER@BIOLOGIE.UNI-MUENCHEN.DE
TELEFON: 089-2180-74800
FAX: 089-2180-74803

3. Übung — Mathematik für Studierende der Biologie — 1.11.2017

Abgabe am 7.11.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 9. und 10. November besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Nichtlineare Iterierte Abbildungen - Stabilität einer Fixpunkt-Lösung) [1 P]
Die nichtlineare Iterierte Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ habe eine Fixpunkt-Lösung $(x^*, x^*, x^*, ...)_{t\in\mathbb{N}}$ mit $x^* = f(x^*)$. Um deren Stabiltät zu untersuchen, betrachten wir kleine Störungen $y_t = x_t - x^*$.

(a) Durch welche (nichtlineare) Iterierte Abbildung wird die Zeitentwicklung von y_t beschrieben? Um diese Frage zu beantworten, setzen Sie die Iterierte Abbildung $x_{t+1} = f(x_t)$ in die Gleichung $y_{t+1} = x_{t+1} - x^*$ ein und ersetzen Sie anschließend x_t durch $x_t = x^* + y_t$.

(b) Entwickeln Sie nun $f(x^* + y_t)$ für kleine Störungen y_t in eine Taylorreihe bis einschließlich des linearen Terms. Welche (lineare) Iterierte Abbildung erhalten Sie für y_t?

(c) Unter welchen Bedingungen an $f'(x^*)$ ist die Fixpunkt-Lösung asymptotisch stabil, wann instabil und wann marginal stabil?

(d) Wenden Sie Ihr Ergebnis auf die nichtlineare Iterierte Abbildung $x_{t+1} = a \cdot x_t \cdot (1 - x_t)$ an. Betrachten Sie den trivialenFixpunkt $x^* = 0$ und (für $a > 0$) die von Null verschiedene Lösung.

2. (Ableitungsregeln) [1 P]
Berechnen Sie unter Verwendung von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y)\right)^{-1}$ (wobei $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f^{-1}(y) \neq 0$) die erste Ableitung der Funktionen

(a) $f(x) = \ln x$ (b) $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x})$

3. (Taylor-Entwicklung) [1 P]
Entwickeln Sie die folgende Funktion bis zur 2. und 3. Ordnung am angegebenen Punkt x_0. Skizzieren Sie für Beispiel (a) die Funktion $f(x)$ und beide Taylorreihen.

(a) $f(x) = 2\,x\,(x + 1)^2,\ x_0 = 0$ (b) $f(x) = 2\,x\,(x + 1)^2,\ x_0 = 1$

4. (Potenzreihen) [1 P]
Zeigen Sie, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{kx} = ke^{kx}$ gilt, indem Sie die Potenzreihe für e^{kx} ableiten.

(bitte wenden)

5. (Kurvendiskussion) [2 P]
Diskutieren Sie die Funktionen

$$g(x) = \frac{x^2}{x-1} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \sin(x)\cos(x)$$

nach folgendem Schema:

(a) Welche Symmetrieeigenschaften hat die Funktion?

(b) Welche Nullstellen hat die Funktion?

(c) Wie ist das asymptotische Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$?

(d) Ist die Funktion stetig? Wie verhält sich die Funktion an den Polstellen (falls sie welche besitzt)?

(e) Bestimmen sie für $f(x)$ sämtliche höhere Ableitungen und für $g(x)$ und $h(x)$ die ersten drei Ableitungen.

(f) Hat die Funktion lokale Extrema? Wo liegen sie?

(g) Hat die Funktion absolute Extrema? Wo liegen sie?

(h) Für welche x ist die Funktion monoton steigend bzw. monoton fallend?

(i) Wie ist das Krümmungsverhalten? In welchen Bereichen ist die Funktion konvex, in welchen ist sie konkav? Wo sind Wendepunkte?

(j) Skizzieren Sie die Funktion (ohne weitere Funktionswerte zu berechnen!).

6. (Umgekehrte Kurvendiskussion) [2 P]
Ein Polynom dritten Grades in der Variablen x ist z.B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

Ein Polynom höheren Grades wird nach demselben Schema definiert.

(a) Bestimmen Sie ein Polynom $f(x)$ dritten Grades (wie oben) so, daß gilt: An der Stelle $x = 1$ hat die Tangente die Steigung 4, eine relative Extremstelle ist $x = 5$, eine Wendestelle ist $x = 10/3$, eine Nullstelle ist 0.

(b) Bestimmen Sie ein Polynom dritten Grades so, daß gilt: Der Punkt $(0, -2)$ liegt auf dem Graphen. Die Normale zur Wendetangente hat die Gleichung $3y - x + 2 = 0$ und schneidet den Graph im Wendepunkt $(2, f(2))$.

(c) Bestimmen Sie ein Polynom *fünften* Grades, dessen Graph zum Ursprung punktsymmetrisch ist, durch den Punkt $(1, -2)$ verläuft und am Punkt $(\sqrt{2}, -\sqrt{8})$ ein relatives Extremum hat.

Hinweis: Bitte beachten Sie, wenn Sie $f(x)$ bestimmt haben, daß Sie noch die *hinreichenden* Kriterien für Extrema und Wendepunkte prüfen! Zur Erinnerung: die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist $f''(x) = 0$.