LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
Department Biologie II
Grosshadernerstr. 2
82152 Planegg-Martinsried

email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Telefon: 089-2180-74800
Fax: 089-2180-74803

## 6. Übung — Mathematik für Studierende der Biologie — 22.11.2017

Abgabe am 28.11.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 30. November und 1. Dezember besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

**1.** (Integration) [2 P]
Berechnen Sie folgende elementare Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-3}^{3} -p^2 \mathrm{d}p$ (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (z+2)^2 \mathrm{d}z$ (c) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^2+1}{2x} \mathrm{d}x$

(d) $\displaystyle\int_{1}^{2} r^{-1} \mathrm{d}r$ (e) $\displaystyle\int_{-1}^{0} -7e^{-x} \mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_{0}^{3} 3^y \ln(3) \mathrm{d}y$

(g) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_{-2}^{2} (y^3-2y)\, \mathrm{d}y$ (i) $\displaystyle\int_{0}^{2} (3x^2+1)\, \mathrm{d}x$

**2.** (Integration) [1 P]
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Substitution.

(a) $\displaystyle\int (4+5x)^{-3}\, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int r \sqrt[3]{9-r^2}\, \mathrm{d}r$ (c) $\displaystyle\int \cos^n(\varphi)\sin(\varphi)\, \mathrm{d}\varphi$

(d) $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, \mathrm{d}x$ (e) $\displaystyle\int \sin(\sqrt{x})\, \mathrm{d}x$ (für Fortgeschrittene)

**3.** (Integration) [2 P]
Berechnen Sie die folgenden Integrale. Hierbei müssen Sie selbst entscheiden, wie Sie vorgehen (z.B. Substitution, partielle Integration oder direkt).

(a) $\displaystyle\int_1^2 x^2\, \mathrm{d}x$ (b) $\displaystyle\int_1^2 6x^2\, \mathrm{d}x$ (c) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, x\, \mathrm{d}x$ (d) $\displaystyle\int_1^2 4x^3\, \mathrm{d}x$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin(x)\, \mathrm{d}x$ (f) $\displaystyle\int_1^2 6x^2+4x^3\, \mathrm{d}x$ (g) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\, \mathrm{d}x$ (h) $\displaystyle\int_0^1 2x\, \mathrm{e}^{2x}\, \mathrm{d}x$

(i) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-2x}\, \mathrm{d}x$ (j) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{t-1}{(3-2t+t^2)^2} \mathrm{d}t$ (k) $\displaystyle\int_{-3}^{3} r(9-r^2)^{1/3} \mathrm{d}r$ (l) $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \mathrm{d}x$

**4.** (Integration) [1 P]
Bestimmen Sie die Fläche, die durch die Parabeln $y = 6x - x^2$ und $y = x^2 - 2x$ begrenzt wird.

**(bitte wenden)**

**5.** (Trigonometrische Funktionen, Integration) [1 P]

Berechnen Sie mittels Substitution das unbestimmte Integral $\int (\sin(x))^{-1}\,\mathrm{d}x$.

*Hinweis:* Wenn der Integrand eines Integrals ein Polynom von trigonometrischen Funktionen ist, dann gibt es die nützliche Substitution $t = \tan\frac{x}{2}$, welche die Integration erleichtert. Die trigonometrischen Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$ und $\tan(x)$ können als Bruch von Polynomen von $t$ geschrieben werden. Drücken Sie zuerst $\sin(x)$ und $\mathrm{d}x$ (durch Anwendung der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus) als Funktion von $t$ aus. Lösen Sie danach das gesuchte Integral mittels dieser Substitution.

**6.** (Integration) [1 P]

(a) Welche Fläche $F(r)$ hat ein Kreis mit Radius $r$? Bestimmen Sie zuerst die Fläche des Viertelkreises im ersten Quadranten. Diese Fläche entspricht genau einem Viertel der gesuchten Fläche.

(b) Wie ändert sich die Kreisfläche $F(r)$, wenn man den Radius $r$ verändert? Bestimmen Sie dazu die Ableitung $\frac{\mathrm{d}F(r)}{\mathrm{d}r}$. Interpretieren Sie das Ergebnis.