LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
Department Biologie II
Grosshadernerstr. 2
82152 Planegg-Martinsried

email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Telefon: 089-2180-74800
Fax: 089-2180-74803

8. Übung — Mathematik für Studierende der Biologie — 6.12.2017

Abgabe am 12.12.2017 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 14. und 15. Dezember besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Differentialgleichungen, qualitative Analyse) [1 P]
Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -x^4 + 2x^2 + a.$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Berechnen Sie alle stationären Lösungen x^* der Differentialgleichung in Abhängigkeit von a. Dazu muss die rechte Seite der Gleichung null gesetzt werden. Überlegen Sie, durch welche Substitution dieses Problem auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt und damit gelöst werden kann.

(c) Diskutieren Sie für $a = -0.5$ welche der stationären Lösungen stabil und welche instabil sind.

(d) Überlegen Sie für welche Werte von a stationäre Lösungen verschwinden bzw. auftauchen. Für welche Bereiche von a gibt es wieviele stationäre Lösungen? Ändert sich die Stabilität der stationären Lösungen? Skizzieren Sie mit Hilfe dieser Überlegungen die Werte der stationären Lösungen als Funktion von a und markieren Sie Bereiche unterschiedlicher Stabilität.

2. (Differentialgleichungen) [1 P]
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = -\beta \cdot x + \gamma \cdot e^{-\alpha t}$$

mit den Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+$. Als Anfangsbedingung sei $x(0) = 0$.

(a) In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass für $\alpha = \beta$ die Lösung

$$x(t) = \gamma \cdot t \cdot e^{-\beta t}$$

lautet. Untersuchen Sie diese Funktion: Wie verhält sie sich für kleine t? Wo hat sie ihr Maximum? Wie groß ist x_{max}? Wie verhält sich $x(t)$ für $t \to \infty$? Wie groß ist die Fläche zwischen t-Achse und $x(t)$?

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $\alpha \neq \beta$. Als Lösung sollten Sie erhalten:

$$x(t) = \frac{\gamma}{\beta - \alpha}\left[e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}\right]$$

(c) Untersuchen Sie diese Funktion nach den selben Kriterien wie in (a).

(d) Was geschieht, wenn Sie α und β vertauschen? Was bedeutet dies für die Interpretation der Lösung?

(bitte wenden)

3. (Differentialgleichungen) [1 P]

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x = \frac{1}{k\,\cos\left(l\,x\right)}$$

mit $k,\, l \in \mathbb{R}$ und $k,\, l \neq 0$.

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Führen Sie eine qualitative Analyse der Differentialgleichung durch.

(c) Welches Verfahren kann man zum Lösen einer solchen Differentialgleichung verwenden?

(d) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

(e) Ist diese Lösung für alle $t > 0$ definiert? Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

4. (Differentialgleichungen, lineare Stabilitätsanalyse) [2 P]

Betrachten Sie die Differentialgleichungen

A) $\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = x^2 - 1$

B) $\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x(t) = -\frac{1}{x^3}$

mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0 > 0$ und der Konstanten $\tau > 0$.

(a) Um was für Differentialgleichungstypen handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Skizzieren Sie die Funktionen $f(x) = x^2 - 1$ und $g(x) = -\frac{1}{x^3}$ (mit Beschriftung der Achsen!).

(c) Führen Sie eine qualitative Analyse der Differentialgleichungen durch.

(d) Diskutieren Sie die Stabilität der stationären Lösungen (lineare Stabilitätsanalyse). Versuchen Sie zu ergründen, warum die *lineare* Stabilitätsanalyse für Differentialgleichung B nicht funktioniert. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Resultaten zur qualitativen Analyse.