LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

PROF. ANDREAS HERZ, DR. STEFAN HÄUSLER
DEPARTMENT BIOLOGIE II
GROSSHADERNERSTR. 2
82152 PLANEGG-MARTINSRIED

EMAIL: HAEUSLER@BIOLOGIE.UNI-MUENCHEN.DE
TELEFON: 089-2180-74800
FAX: 089-2180-74803

10. Übung — Mathematik für Studierende der Biologie — 20.12.2017

Abgabe am 9.1.2018 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 11. und 12. Januar besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Differentialgleichungen) [2 P]

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = [x(t)]^2 \,.$$

(a) Um was für eine Differentialgleichung handelt es sich (Ordnung, Linearität)?

(b) Versuchen Sie die Differentialgleichung mit dem Exponentialansatz $x(t) = a \cdot e^{bt}$ zu lösen. Warum gelingt dies nicht?

(c) Verwenden Sie nun den Ansatz $x(t) = a(t-b)^c$. Setzen Sie diesen Ansatz in die Differentialgleichung ein und bestimmen Sie durch Koeffizientenvergleich die Lösung.

(d) Lösen Sie die Differentialgleichung mittels “Variation der Konstanten” und vergleichen Sie beide Ergebnisse.

(e) Betrachten Sie abschliessend noch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}t^3}x(t) = -x(t).$$

Auf welches Polynom führt des Exponentialansatz $x(t) = a \cdot e^{bt}$? Welche $b \in \mathbb{C}$ ergeben sich daraus?

(f) Freiwillige Zusatzaufgabe: Bestimmen Sie daraus die allgemeine Lösung $x(t)$. Wie viele reellwertige freie Parameter gibt es?

2. (Matrizen) [1 P]

Welche der folgenden Behauptungen sind richtig? Begründen Sie Ihre Antworten formal.

(a) Matrizen sind kommutativ bezüglich der Addition.

(b) Matrizen sind kommutativ bezüglich der Multiplikation.

(c) Eine 2×2 oder 3×3 Drehmatrix $\mathbf{D}$ ist immer invertierbar. D.h. es existiert eine Matrix $\mathbf{D}^{-1}$, sodass $\mathbf{D}^{-1}\mathbf{D}$ und $\mathbf{D}\mathbf{D}^{-1}$ die Einheitsmatrix ergeben.

3. (Matrizen) [1 P]

Gegeben sind vier Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie, soweit möglich:

(a) $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ (b) $\mathbf{AC}$ (c) $\mathbf{C}^T\mathbf{A}$ (d) $\mathbf{CD}$ (e) $\mathbf{DC}$ (f) $\mathbf{CD} - (\mathbf{CD})^T$

(bitte wenden)

4. (Drehungen in 2 Dimensionen) [1 P]
Eine Drehung um den Ursprung eines 2-dimensionalen Koordinatensystems um einen Winkel α kann durch die Matrix

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

(a) Berechnen Sie die um 60° gedrehten Koordinatenachsen $\mathbf{D}(60°)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D}(60°)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und fertigen Sie dazu eine kleine Skizze an.

(b) Zeigen Sie, dass ein gedrehter Vektor $\vec{y} = \mathbf{D}(\alpha)\vec{x}$ die gleiche Länge wie der Ausgangsvektor $\vec{x}$ hat.

(c) Berechnen Sie $\mathbf{A} = \mathbf{D}(\alpha)\mathbf{D}(\beta)$ und $\mathbf{B} = \mathbf{D}(\beta)\mathbf{D}(\alpha)$. *Bemerkung:* Sie sollten $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ erhalten. Drehungen in zwei Dimensionen sind also vertauschbar. Dies ist in höheren Dimensionen im Allgemeinen nicht der Fall.

(d) Berechnen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, welcher Drehmatrix $\mathbf{A}$ entspricht.

5. (Drehungen in 3 Dimensionen) [1 P]
Matrizen für Drehungen um die x, y, und z-Achse mit den Winkeln α, β bzw. γ sind im Skript in den Gleichungen (16.36) bis (16.38) definiert. Wie lautet die Matrix $\mathbf{D}_1(\pi/2)$ für eine Drehung um die x-Achse mit 90 Grad, wie die Matrix $\mathbf{D}_2(\pi/2)$ für eine Drehung um die y-Achse mit 90 Grad? Berechnen Sie das Produkt $\mathbf{D}_1(\pi/2)\mathbf{D}_2(\pi/2)$ und $\mathbf{D}_2(\pi/2)\mathbf{D}_1(\pi/2)$ und interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

6. (Determinanten) [1 P]
Sind die folgenden Behauptungen richtig? Determinanten ändern ihren Wert nicht, wenn man:

(a) Die Reihenfolge der Zeilen vertauscht.

(b) Eine Zeile mit einer Konstanten multipliziert.

(c) Eine Zeile mit einer anderen Zeile elementweise multipliziert.

(d) Zwei Zeilen gleichzeitig mit -1 multipliziert.

Begründen Sie Ihre Antworten formal.

7. (Determinanten, Laplace-Entwicklung) [1 P]
Benutzen Sie die Laplace-Entwicklung, um die Determinante von

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Entwickeln Sie zuerst nach der ersten Spalte, um die Kofaktoren, Minoren und damit die Determinante zu bestimmen. Vergleichen Sie mit einer Entwicklung nach der ersten Reihe. Welche Berechnung geht schneller? Warum?