LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
FAKULTÄT FÜR BIOLOGIE

Prof. Andreas Herz, Dr. Stefan Häusler
Department Biologie II
Grosshadernerstr. 2
82152 Planegg-Martinsried
email: haeusler@biologie.uni-muenchen.de
Telefon: 089-2180-74800
Fax: 089-2180-74803

11. Übung — Mathematik für Studierende der Biologie — 10.1.2018

Abgabe am 16.1.2018 vor der Vorlesung. Die Aufgaben werden in den Tutorien vom 18. und 19. Januar besprochen. Aktuelle Infos und Übungszettel finden Sie unter:
`http://neuro.bio.lmu.de/teaching/mathe-bio_ws17-18/index.html`

---

1. (Invertierung von Matrizen)
Welche der vier Matrizen sind invertierbar? Wie lauten gegebenenfalls ihre Inversen?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. (Lösung durch Matrixinversion)
Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{für} \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}$$

durch Inversion der Matrix $\mathbf{A}$. Welche Bedingung an die Matrix muss dazu erfüllt sein? Trifft dies im vorliegenden Fall zu?

3. (Lineare Gleichungssysteme, Cramersche Regel)
Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren **und** der Cramerschen Regel.

(a)

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

4. (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Es sei

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \det(\mathbf{N} - \lambda\mathbf{E})$, wobei $\mathbf{E}$ die 2×2 Einheitsmatrix ist.

(bitte wenden)

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte (die Lösungen zu $p(\lambda) = 0$).

(c) Berechnen Sie die Eigenvektoren von $\mathbf{N}$.

(d) Berechnen Sie $\det(\mathbf{N})$ und die inverse Matrix $\mathbf{N}^{-1}$.

(e) Berechnen Sie zur Probe $\mathbf{N}\mathbf{N}^{-1}$.

(f) Tragen Sie die Eigenvektoren von $\mathbf{N}$ spaltenweise in eine Matrix $\mathbf{B}$ ein. Sie sollten dabei

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten.

(g) Berechnen Sie $\mathbf{B}^{-1}$.

(h) Berechnen Sie nun $F(\mathbf{N}) = \mathbf{B}\mathbf{D}\mathbf{B}^{-1}$, wobei $\mathbf{D}$ durch

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix}$$

gegeben ist und vergleichen Sie das Resultat mit $\mathbf{N}^{-1}$.

5. (Komplexe Eigenwerte und Eigenvektoren)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ -20 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

6. (Eigenwerte und Eigenvektoren)
Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in \mathbb{R}$ und zeigen Sie, dass diese orthogonal zueinander sind.